



Универзитет у Београду – Грађевински
факултет www.grf.bg.ac.rs

Студијски програм: **ГРАЂЕВИНАРСТВО МАСТЕР АКАДЕМСКЕ СТУДИЈЕ**

Модул: **КОНСТРУКЦИЈЕ**

Година/Семестар: **I година / I семестар**

Назив предмета (шифра): **БЕТОНСКИ МОСТОВИ (MOK1BM)**

Наставник: **асис. Стефан Ж. Митровић**

Наслов вежби: **Ефекти претходног напрезања.**

Статички прорачун зависно од начина извођења

Датум:

Београд, 2024.

Сва ауторска права аутора презентације и/или видео снимака су заштићена. Снимак или презентација се могу користити само за наставу студената Грађевинског факултета Универзитета у Београду у школској 2024/2025 и не могу се користити за друге сврхе без писмене сагласности аутора материјала.

Грађевински факултет Универзитета у
Београду, 2024.

7. Вежба

- Садржај:

I) Ефекти претходног напрезања:

1. Пример 1
2. Пример 2

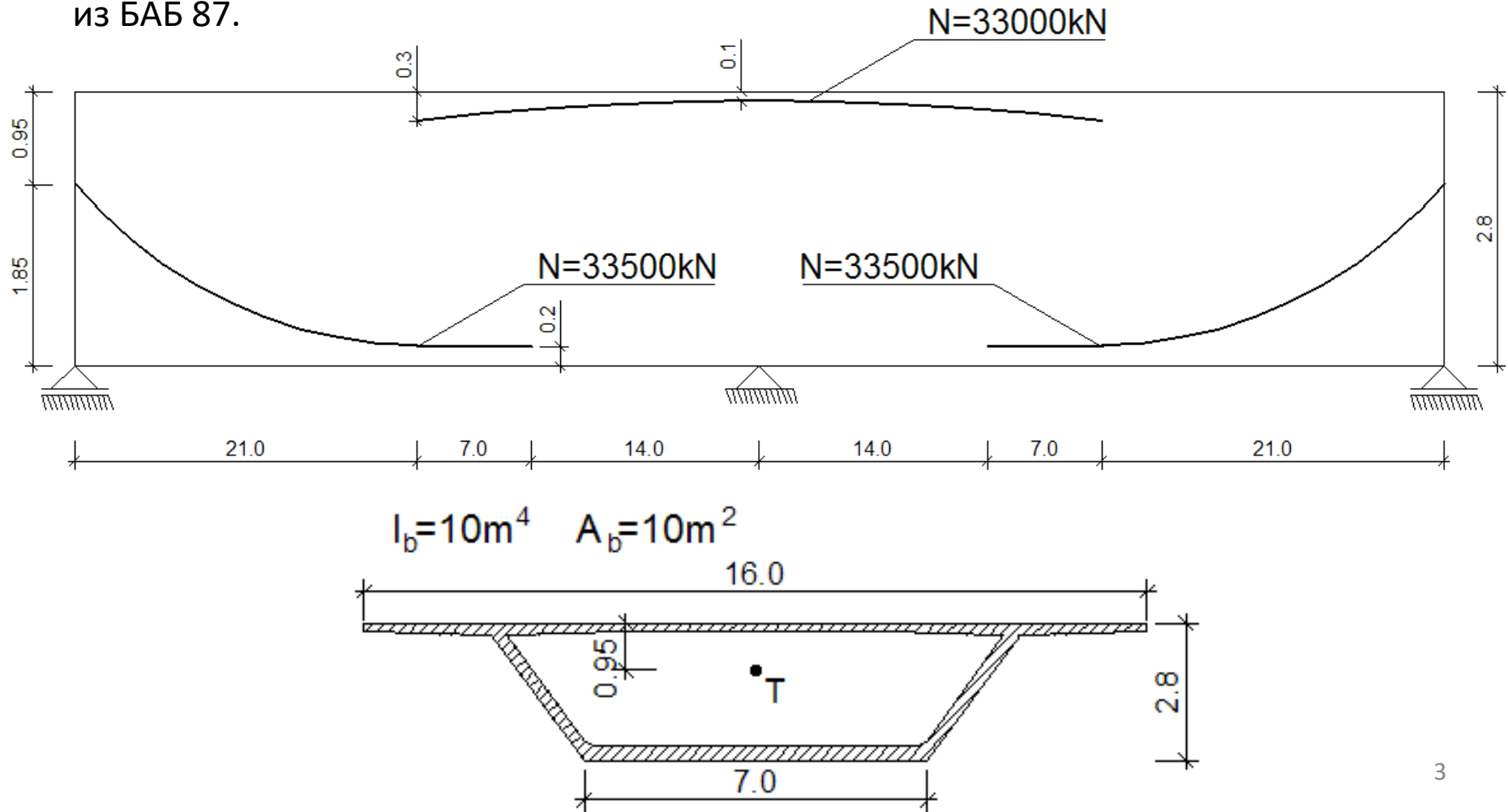
II) Статички прорачун зависно од начина извођења:

1. Извођење поље по поље
2. Континуирани гредни мостови задатак 1
3. Континуирани гредни мостови задатак 2

ПРИМЕР 1

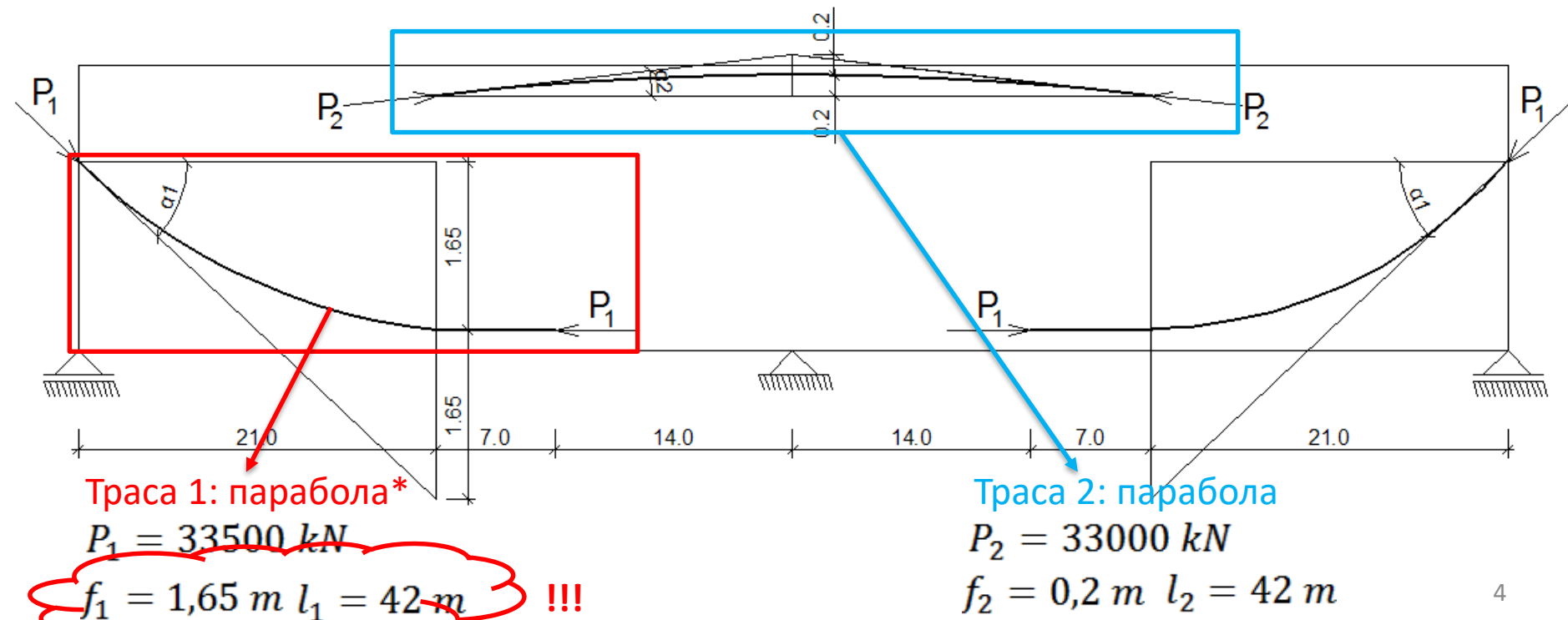
За линијски носач статичког система континуалне греде на два поља распона 42.00 метара сандучастог попречног пресека (приказаног на слици испод) потребно је:

- Одредити утицаје од претходног напрезања у носачу услед деловања силе претходног напрезања. Задатак урадити методом сила и применом таблица за прорачун утицаја из БАБ 87.

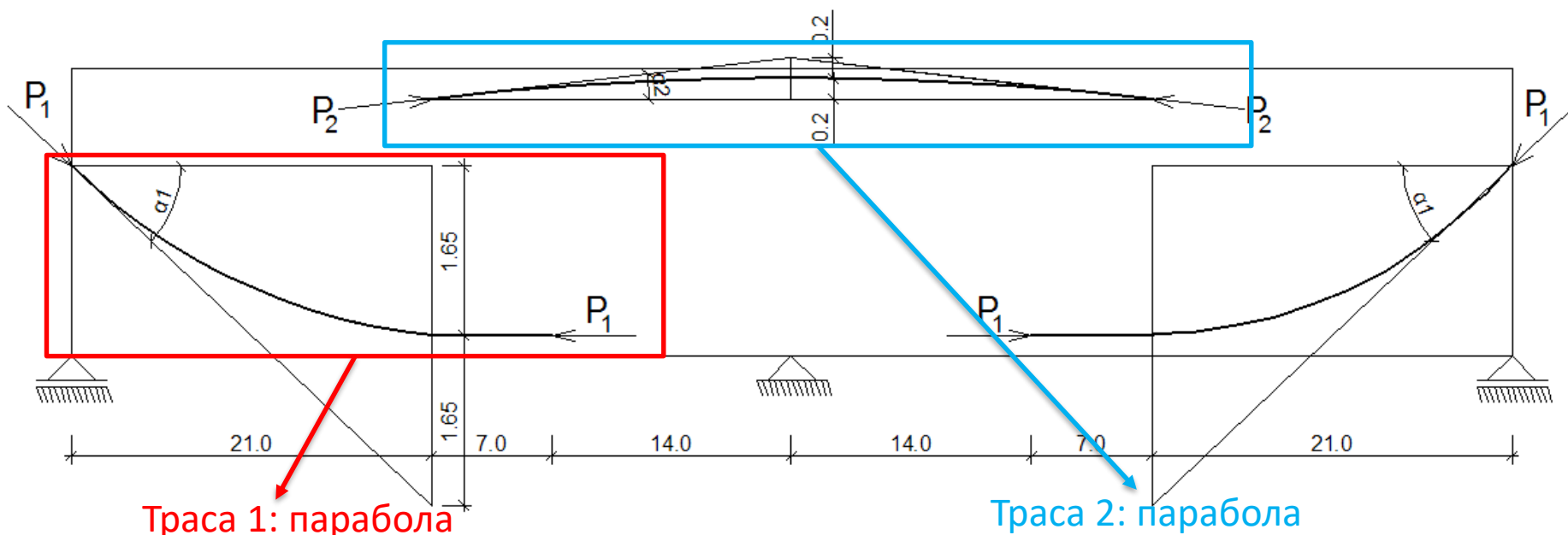


ПРИМЕР 1

- Први корак представља срачунавање **еквивалентног оптерећења од претходног напрезања** и постављање истог у одговарајући положај на носачу;
- У конкретном задатку **обе трасе каблова у носачу су параболичне***. Следи да еквивалентно оптерећење представља **линијско оптерећење дуж трасе каблова, као и силе на крајевима кабла**;
- **Силе на крајевима кабла се разлажу на хоризонталну и вертикалну компоненту.** Како су кабли ексцентрично постављени у односу на тежиште носача, приликом редуковања оптерећења на тежиште поред силе на крајевима кабла постоји **и моменат савијања**.



ПРИМЕР 1



$$P_1 = 33500 \text{ kN}$$

$$f_1 = 1,65 \text{ m} \quad l_1 = 42 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2 \cdot 1,65}{21} = 0.1571$$

$$V_1 = P_1 \sin \alpha_1 = 5200 \text{ kN}$$

$$N_1 = P_1 \cos \alpha_1 = 33093,88 \text{ kN}$$

$$M_1 = P_1 \cdot 1,65 = 55275 \text{ kNm}$$

$$q_{e1} = \frac{8 \cdot P_1 f_1}{l_1^2} = \frac{8 \cdot 33500 \cdot 1,65}{42^2} = 250,68 \text{ kN/m}$$

$$P_2 = 33000 \text{ kN}$$

$$f_2 = 0,2 \text{ m} \quad l_2 = 42 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{2 \cdot 0,2}{21} = 0.0190$$

$$V_2 = P_2 \sin \alpha_2 = 628,46 \text{ kN}$$

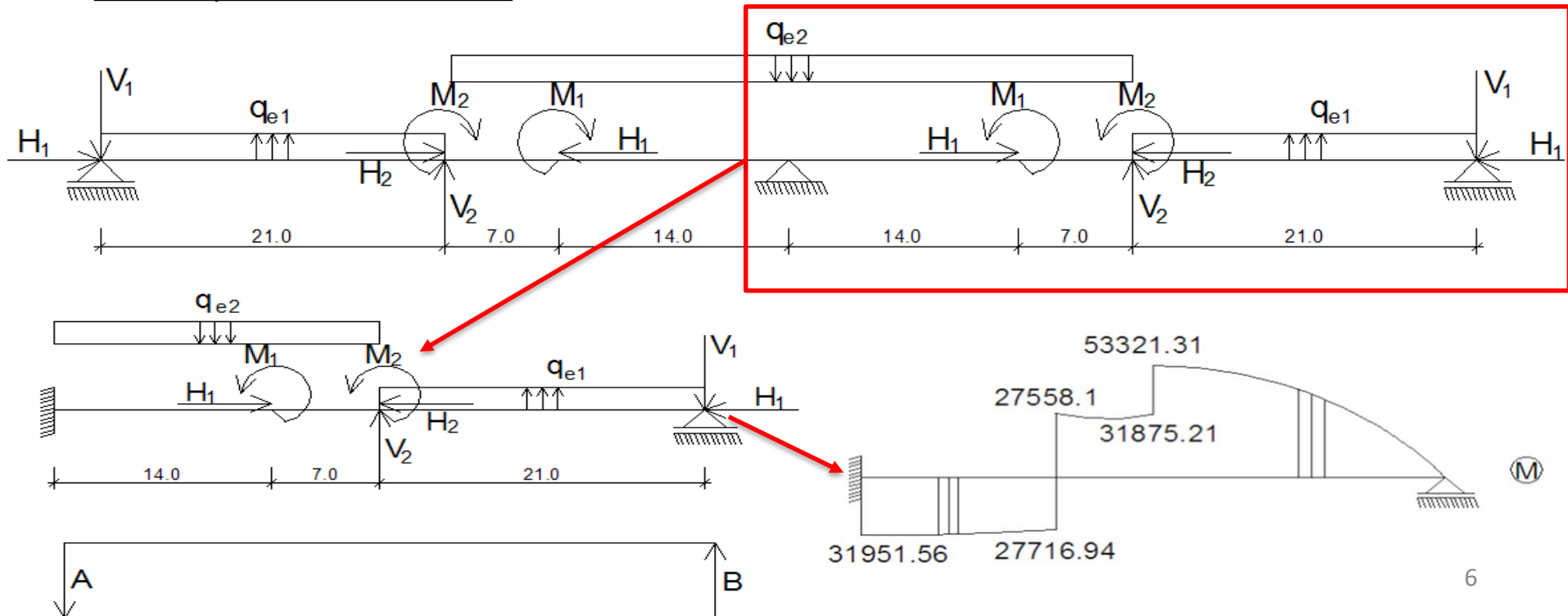
$$N_2 = P_2 \cos \alpha_2 = 32994,01 \text{ kN}$$

$$M_2 = P_2 \cdot 0,65 = 21446,1 \text{ kNm}$$

$$q_{e2} = \frac{8 \cdot 33000 \cdot 0,2}{42^2} = 29,93 \text{ kN/m}$$

ПРИМЕР 1

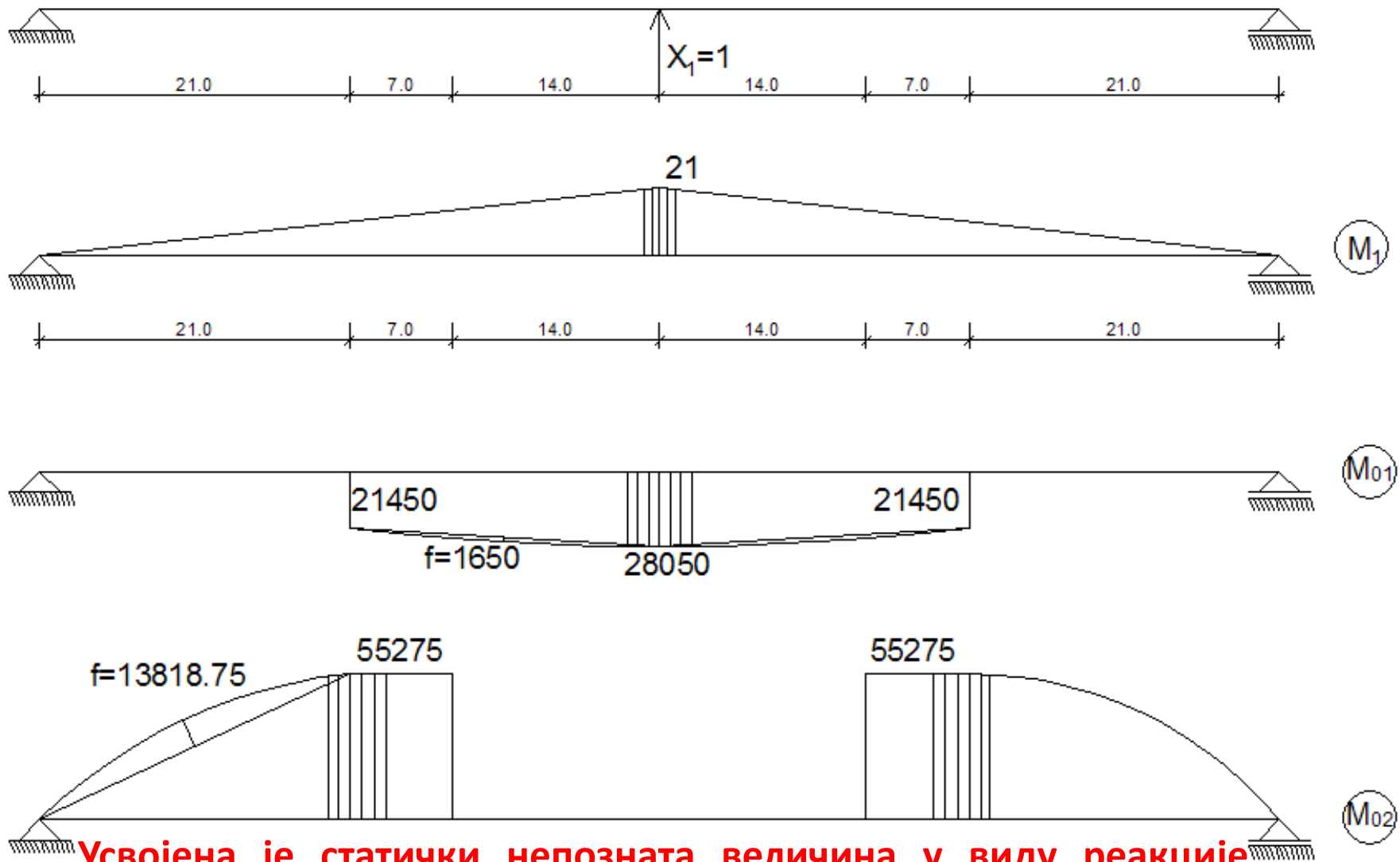
- Наредни корак представља постављање еквивалентног оптерећења у одговарајући положај и срачунавање утицаја. У наставку ће се моменат савијања услед еквивалентног оптерећења одредити применом таблица из БАБ 87.
- Потребно је применити **принцип суперпозиције** – раздвојити оптерећења, пронаћи које диспозиције оптерећења имају у табlici и на крају сабрати и добити коначну вредност утицаја!
- У овоме примеру – **имамо 5 посебних оптерећења** за које имају утицаји у таблицама (q_{e1} , q_{e2} , M_1 , M_2 и V_2) . Ово важи јер је оптерећење симетрично па се може посматрати пола носача!



ПРИМЕР 1

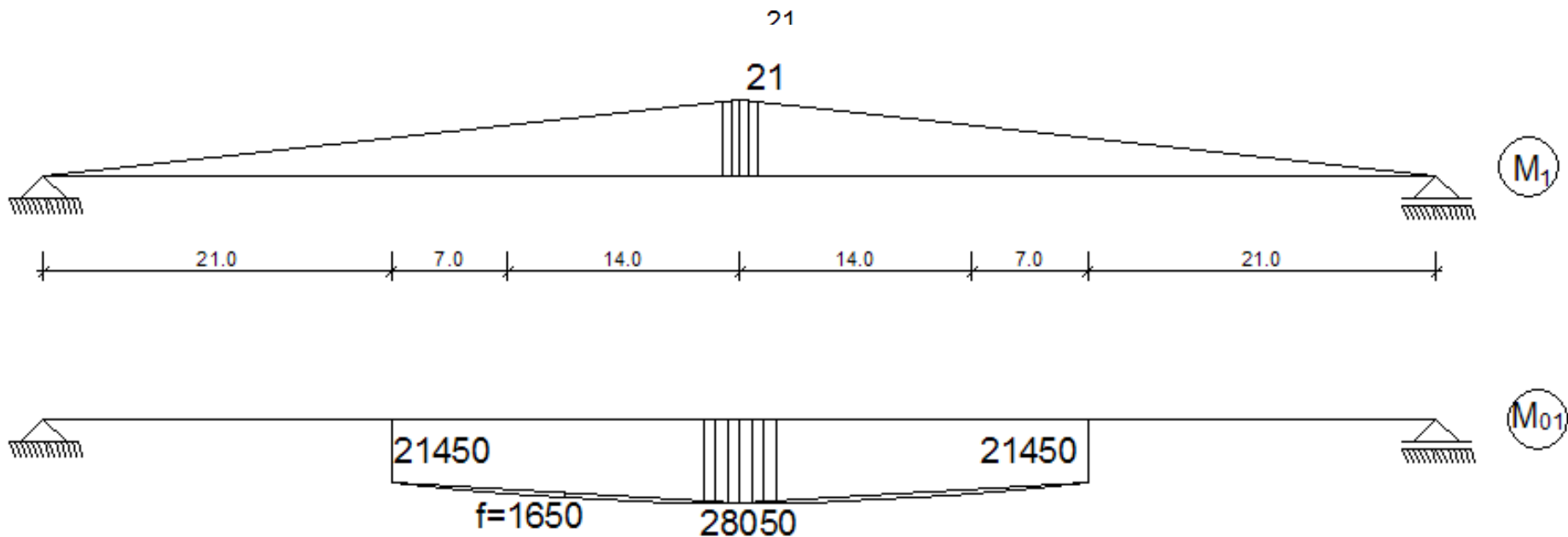
- Друга моћност за срачунавање утицаја је **метода сила**. Потребно је одредити статичку неодређеност носача и изабрати статички непознате величине.
- Затим се на основном систему **(који је статички одређен систем)** који се добија уклањањем ослонаца на местима статички непознатих величина цртају дијаграми момената савијања услед спољашњег оптерећења и статички непознатих величина за чију вредност се узима вредност 1.00.
- **Методом Верешчагина** одређује се чланови матрице флексибилности и постављњем одговарајућих једначина добијају вредности статички непознатих.
- **Укупан моменат савијања се добија сабирањем момента од оптерећења на основном систему и момента од статички непознате величине вредности 1.00 на основном систему који је умножен вредношћу статички непознате величине.**

ПРИМЕР 1



Усвојена је статички непозната величина у виду реакције средњег ослонаца и укинут је средњи ослонац чиме је добијен основни систем у виду просте греде!

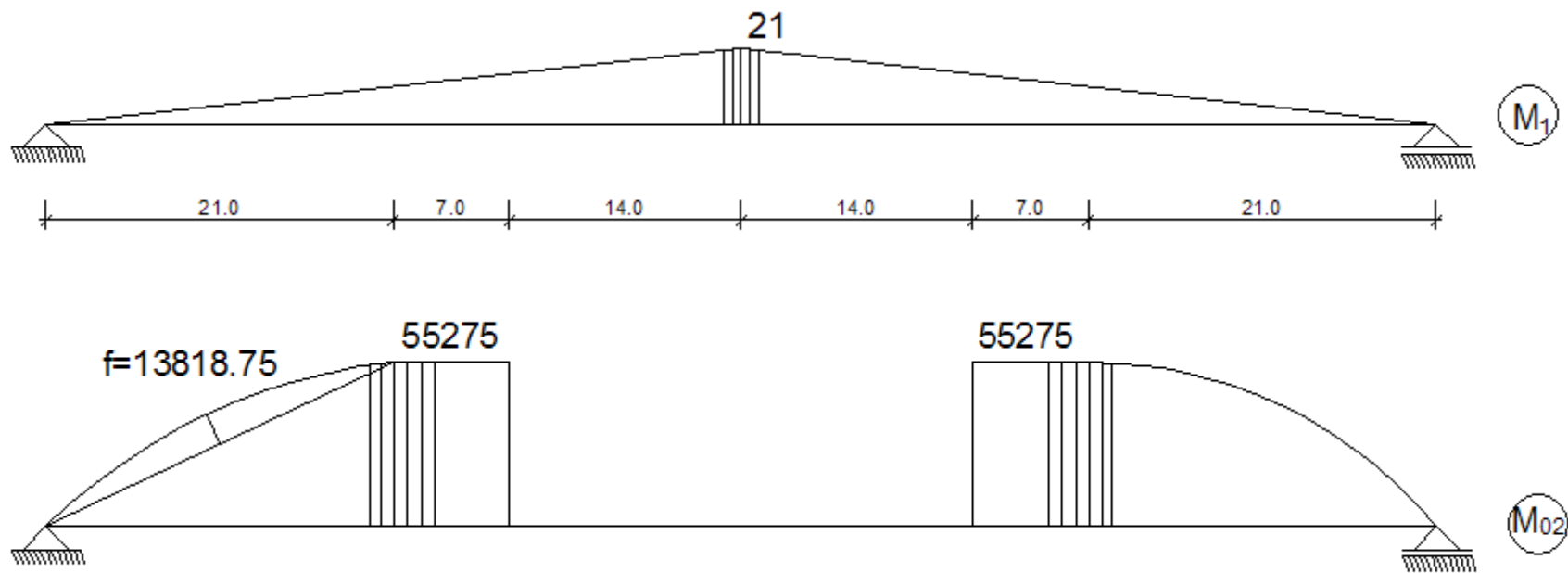
ПРИМЕР 1



$$\delta_{10}^2 = -2 \cdot \left[\frac{21}{6} \cdot [10,5 \cdot (2 \cdot 21450 + 28050) + 21 \cdot (2 \cdot 28050 + 21450)] + \frac{21}{3} \cdot 1650 \cdot (10,5 + 21) \right]$$

$$= -17342325$$

ПРИМЕР 1



$$\delta_{10}^2 = 2 \cdot \left[\frac{7}{2} \cdot 55275 \cdot (10,5 + 14) + \frac{21}{3} \cdot 55275 \cdot 10,5 + \frac{21}{3} \cdot 13818.75 \cdot 10,5 \right] = 19636443,75$$

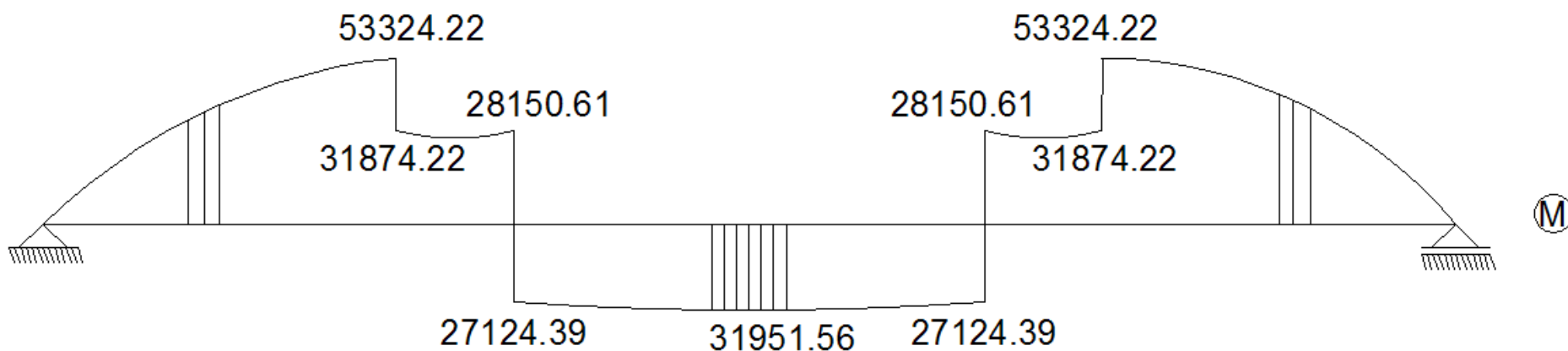
ПРИМЕР 1

$$\delta_{11} = 2 \cdot \frac{42}{3} \cdot 21^2 = 12348$$

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{10} = 0$$

$$X_1 = -\frac{19636443,75 - 17342325}{12348} = -185.79$$

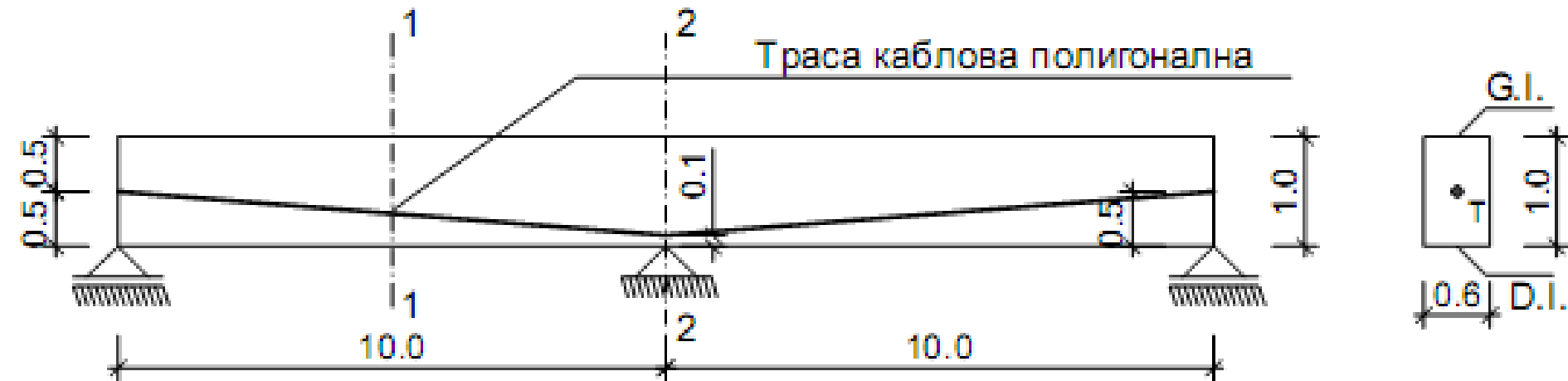
$$M = M_{o1} + M_{o2} + M_1 \times X_1$$



ПРИМЕР 2

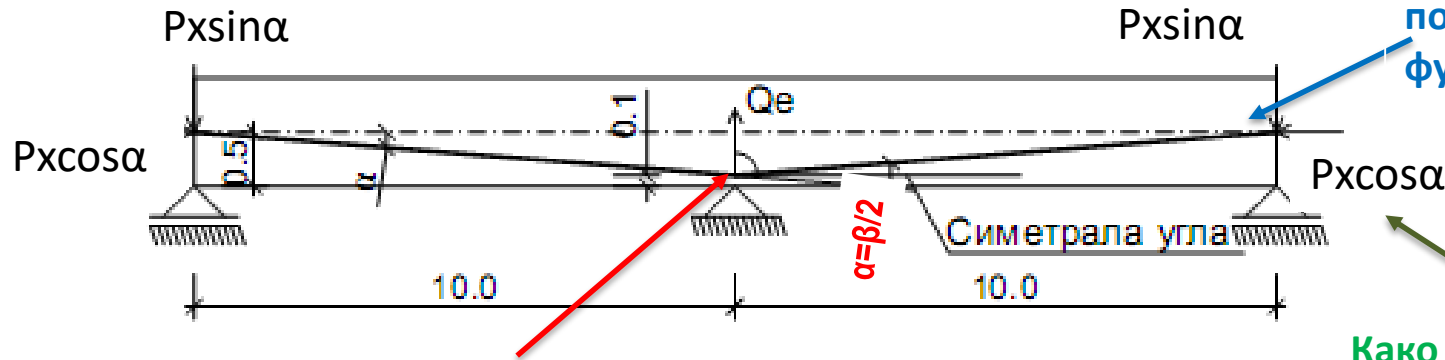
За линијски носач статичког система континуалног носача на два поља распона 10.00 метара правоугаоног попречног пресека (60x100 cm) потребно је:

- Одредити интензитет силе претходног напрезања P из услова да ни у једном пресеку носача нема напона затезања услед сопствене тежине (цео пресек притиснут);
- За добијену вредност силе претходног напрезања P срачунати укупне напоне у карактеристичним пресецима услед утицаја сопствене тежине и претходног напрезања.



ПРИМЕР 2

- Први корак представља срачунавање и цртање дијаграма статичких утицаја услед претходног напрезања и сопствене тежине;
- Како се у задатку разматрају нормални напони (σ) довољно је нацртати дијаграме нормалних сила (N) и момената савијања (M);
- **Како је траса каблова линеарна са преломом на средини носача од еквивалентог оптерећења имамо само скретну силу Q и силу на месту котви каблова која се разлаже на хоризонталну и вертикалну компоненту!**



Скретне сила делује у правцу симетрале скретног угла β

Скретна сила се одређује по формули:

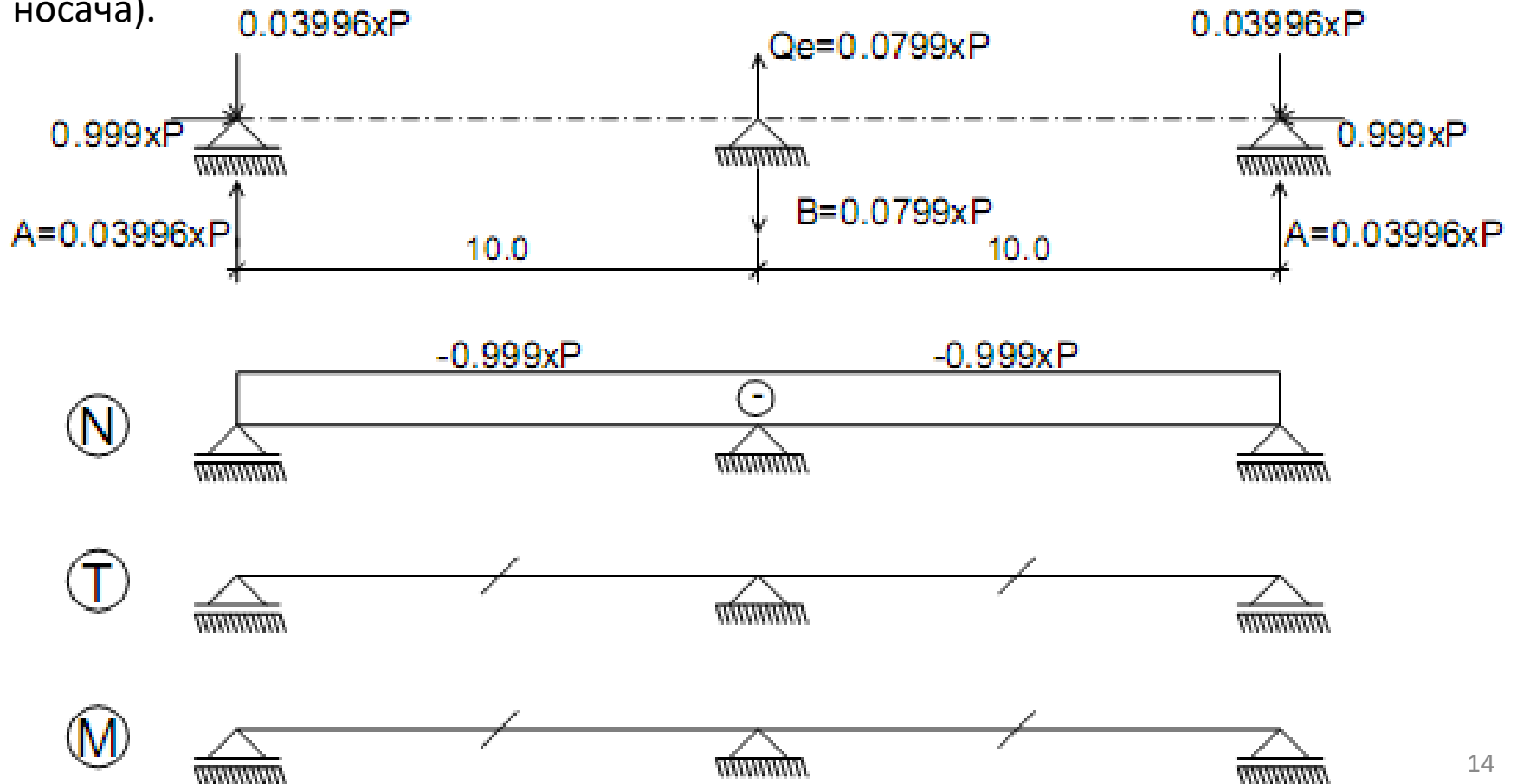
$$Q_e = 2 \times P \times \sin(\beta/2)$$

$$\text{tg} \alpha = 0.4/10 \rightarrow \cos \alpha = 0.999 ; \sin \alpha = 0.03996$$

$$\text{tg}(\beta/2) = 0.4/10 = \text{tg} \alpha \rightarrow Q_e = 0.0799 \times P$$

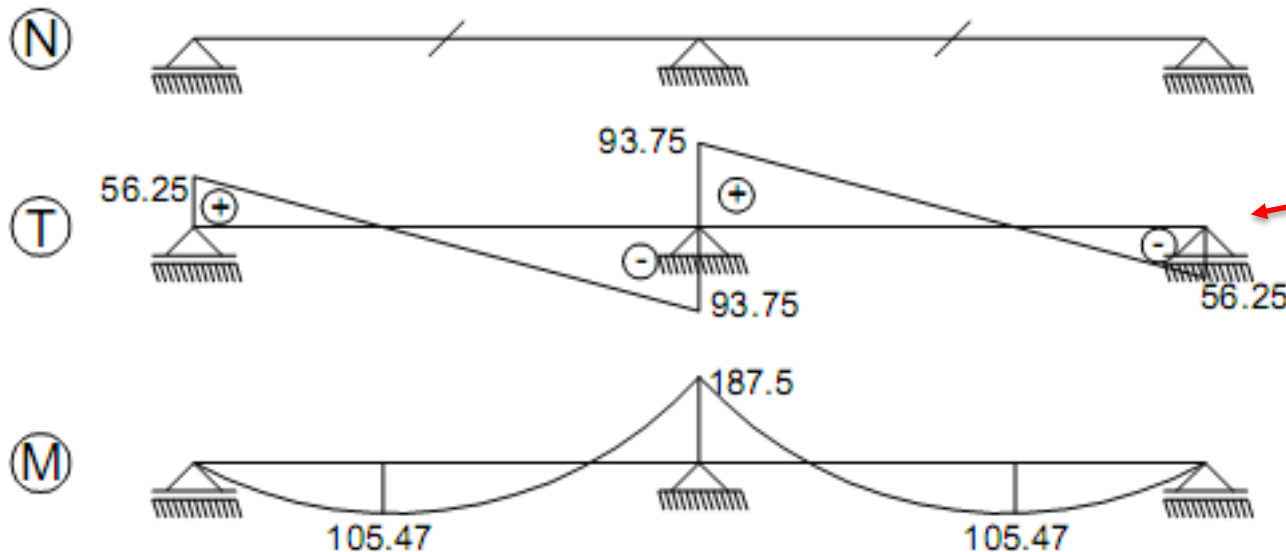
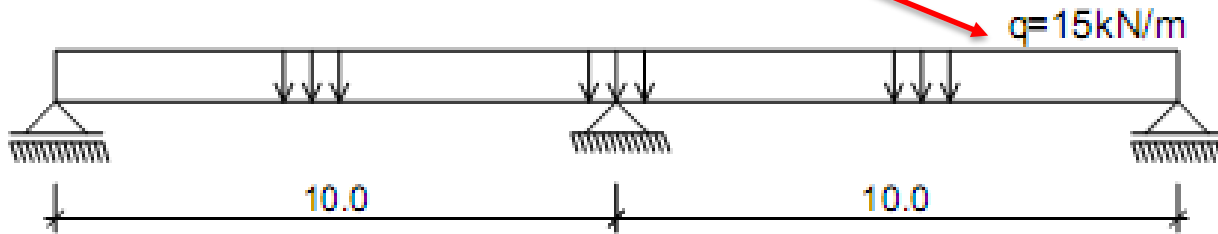
ПРИМЕР 2

- Наредни корак представља одређивање статичких утицаја услед нанетог еквивалентног оптерећења;
- Дијаграми статичких утицаја су приказани на слици испод. Можемо видети да услед овога оптерећења нема момената савијања на носачу (како се ради о статички неодређеном носачу услед еквивалентног оптерећења постоје реакције, у конкретном задатку су занемарени секундарни ефекти преднапрезања – моменат од реакција носача).

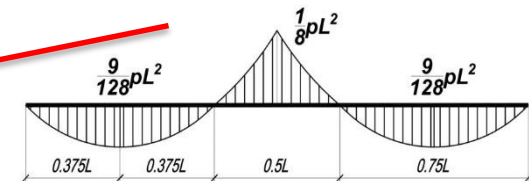


ПРИМЕР 2

- Наредни корак представља одређивање статичких утицаја услед сопствене тежине;
- Оптерећење од сопствене тежине се добија као производ површине попречног пресека и запреминске тежине бетона;
- Интезитет оптерећења: $g=0.6 \times 1.0 \times 25 = 15 \text{ kN/m}$



ТАБЛИЦЕ УТИЦАЈА!



ПРИМЕР 2

- Последњи корак у првом делу задатка је да се поставе напонски услови у карактеристичним пресецима;
- **Разматрају се пресеци у пољу и над средњим ослонцем;**
- Постављају се напонски услови у наведеним пресецима, тј. исписују се изрази за напоне у пресеку који се изједначавају са нулом (услов из поставке задатка!) и срачунава се сила преднапрезања P ;
- **Усваја се већа вредност од добијених вредности.**
- Статички утицаји пресецима:
 - Пресек 1-1 – пресек у пољу:
 $N_{1-1} = 0.999 \times P$
 $M_{1-1} = 0$ од ПН, $M_{1-1} = 105.47 \text{ kNm}$ од сопствене тежине
 - Пресек 2-2 – пресек изнад средњег ослонца:
 $N_{2-2} = 0.999 \times P \text{ kN}$
 $M_{2-2} = 0$ од ПН, $M_{2-2} = -187.5 \text{ kNm}$ од сопствене тежине

ПРИМЕР 2

- Последњи корак у првом делу задатка је да се поставе напонски услови у карактеристичним пресецима;
- Разматрају се пресеци у пољу и над средњим ослоном;**
- Постављају се напонски услови у наведеним пресецима, тј. исписују се изрази за напоне у пресеку који се изједначавају са нулом (услов из поставке задатка!) и срачунава се сила преднапрезања P ;
- Усваја се већа вредност од добијених вредности.**

- Геометријске карактеристике:

$$A = b \times h = 0.6 \times 1.0 = 0.6 \text{ m}^2$$

$$W = b \times h^2 / 6 = 0.6 \times 1.0^2 / 6 = 0.1 \text{ m}^3$$

- Израз за напон у пресеку 1-1:

$$\sigma = N/A \pm M/W$$

$$\sigma = 0.999 \times P / 0.6 - 187.5 / 0.1 = 0$$

$$0.999 \times P / 0.6 = 187.5 / 0.1$$

$$P = 1126 \text{ kN}$$

- Израз за напон у пресеку 2-2:

$$\sigma = N/A \pm M/W$$

$$\sigma = 0.999 \times P / 0.6 - 105.47 / 0.1 = 0$$

$$0.999 \times P / 0.6 = 105.47 / 0.1$$

$$P = 633 \text{ kN}$$

$$P = \max(1126; 633) = 1126 \text{ kN}$$

ПРИМЕР 2

- Други део задатка представља срачунавање напона на ивици пресека у оба карактеристична пресека за добијену вредност силе претходног напрезања P ;
- Потребно је у израз за напоне заменити вредности статичких утицаја. Резултати су приказани у табели испод;
- Посебно су срачунати напони од ПН, сопствене тежине и укупни напони.

$\sigma = N/A \pm M/W$ формула за срачунавање напона на ивицама пресека

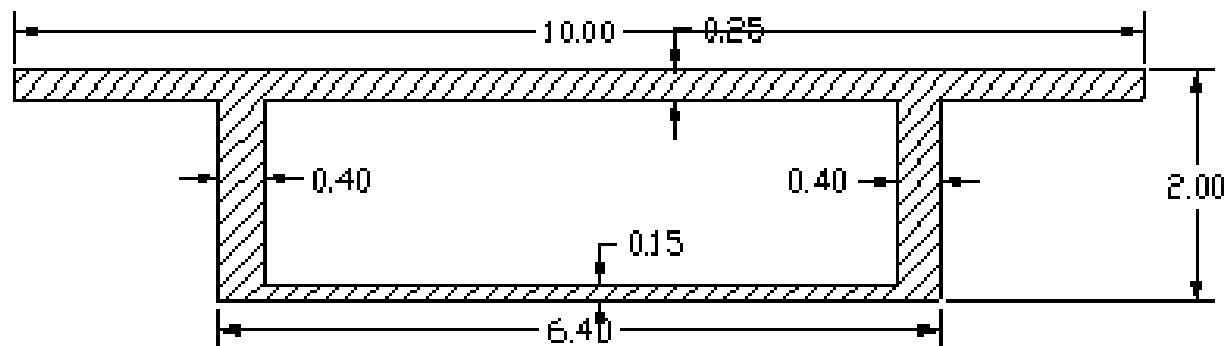
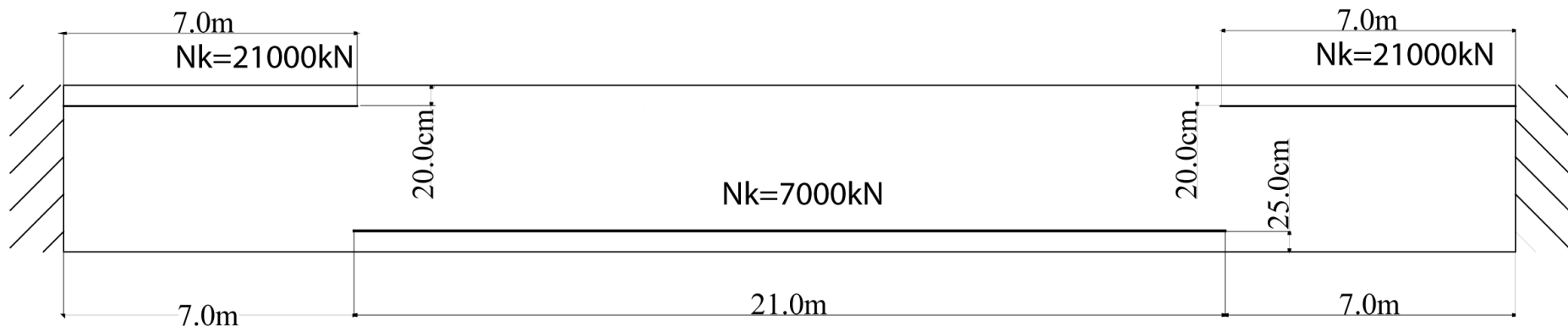
		Напони у пољу [kN/m ²] 1-1	Напони над ослонцем [kN/m ²] 2-2
G	ГИ	937.5	-1875
	ДИ	- 937.5	+1875
PN	ГИ	1875.0	1875.0
	ДИ	1875.0	1875.0
УКУПНИ	ГИ	2812.5	0
	ДИ	937.5	3750

Контрола задатка: нема напона затезања (вредности су веће или једнаке нули)!

Задатак за вежбу – Домаћи рад

За линијски носач статичког система обострано укљештене греде распона 35.00 метара сандучастог попречног пресека (приказаног на слици испод) потребно је:

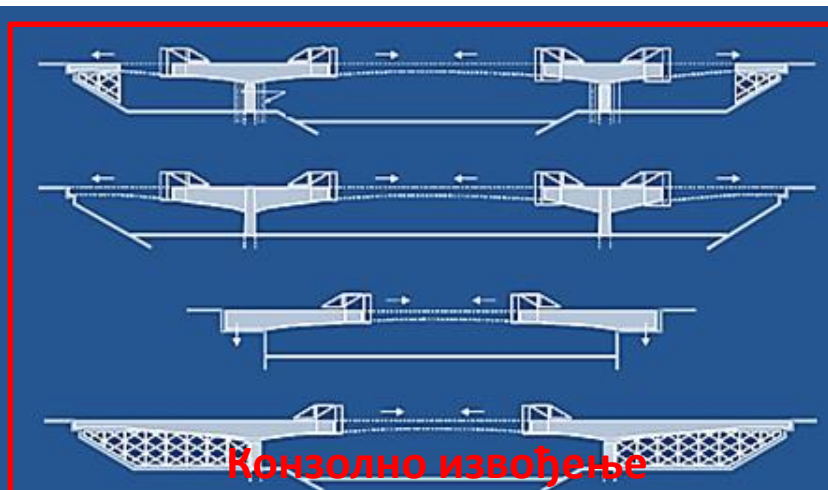
- Одредити утицаје од претходног напрезања у носачу услед деловања силе претходног напрезања. Задатак урадити методом сила и применом таблица за прорачун утицаја из БАБ 87.



Трансформација система током извођења

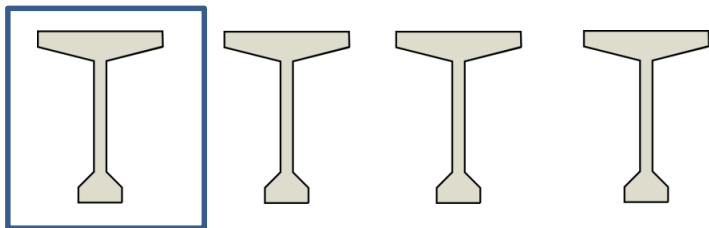
Током различитих фаза извођења конструкција пролази кроз низ сукцесивних статичких система.

Могућа је и промена пресека уз истовремену/накнадну промену система.

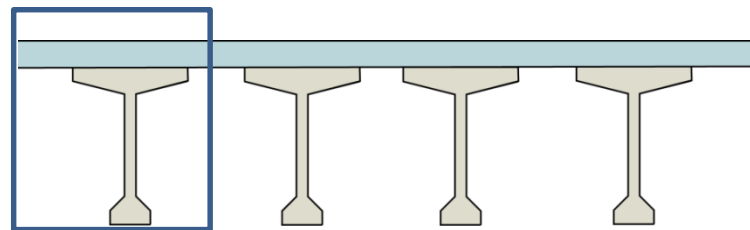


Промена пресека са или без промене система

Пресек прве фазе – основни пресек



Пресек друге фазе – спрегнути пресек



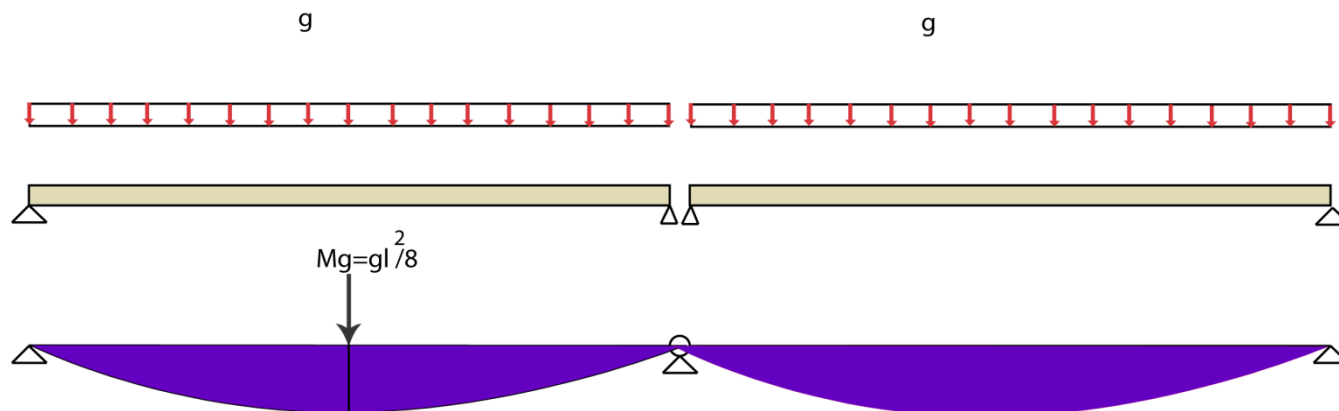
Поједностављени принцип: Пресечне силе се одређују простом суперпозицијом пресечних сила из различитих система водећи рачуна које је оптерећење деловало у појединој фази извођења (статичког система) и у коме попречном пресеку (уколико долази и до промене попречног пресека).

Једнострука промена система

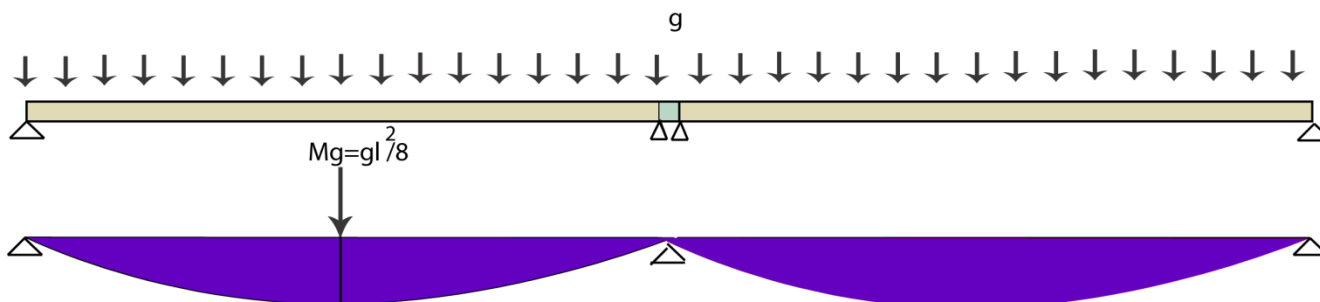
Прва фаза

систем=просте греде

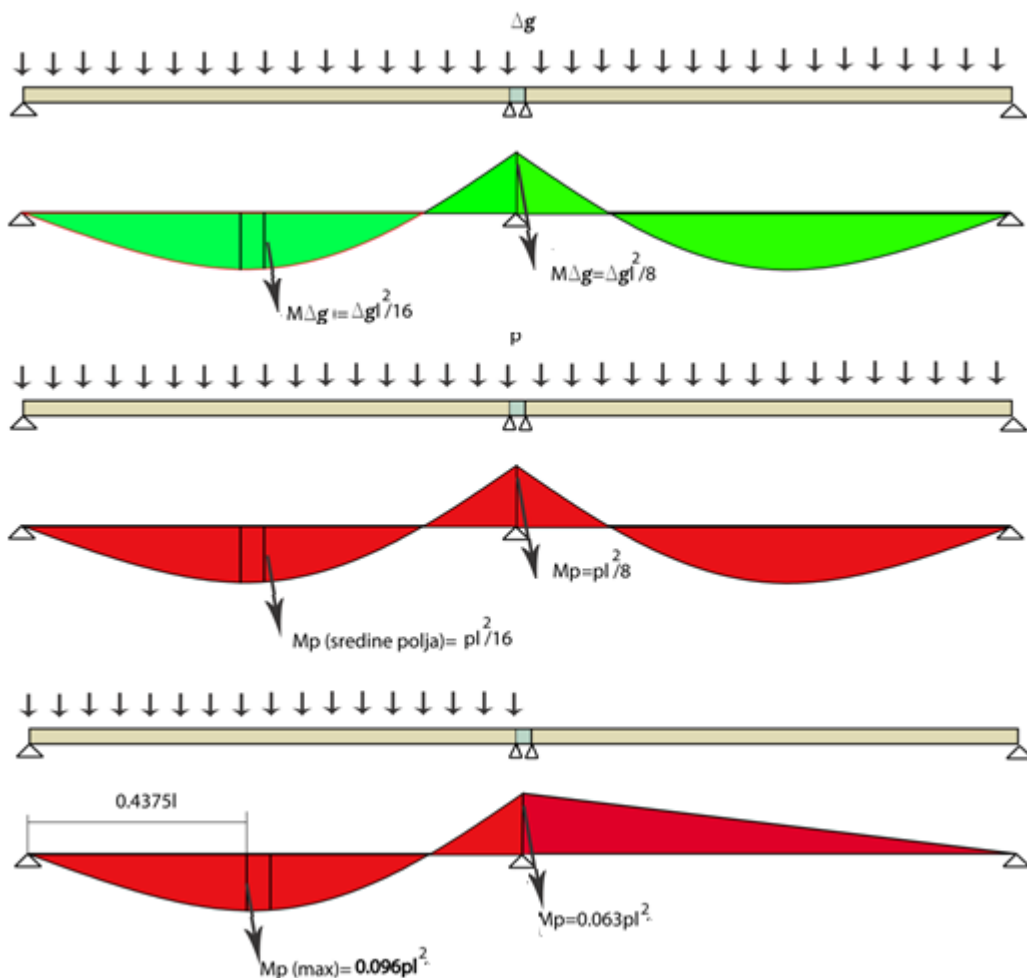
оптерећење = сопствена тежина



Утицаји од сопствене тежине (која је деловала пре промене система) а
након формирања новог статичког система



Конечни статички систем - експлоатација



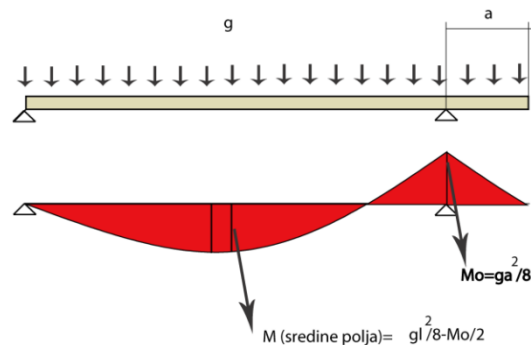
Оптерећење које делује након промене статичког система (додатно стално, саобраћај,...) изазива утицаје у новонасталом систему

Сопствена тежина префабрикованих носача је "ушла" у почетни систем, те не изазива утицаје након промене статичког система

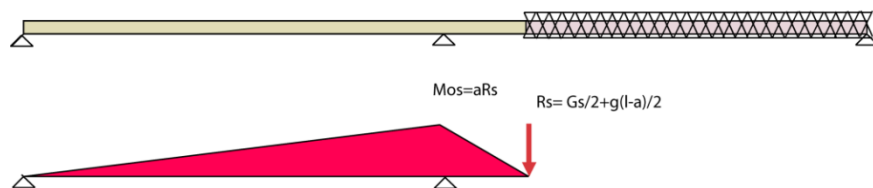
Извођење поље по поље

Систем 1 – греди са препустом

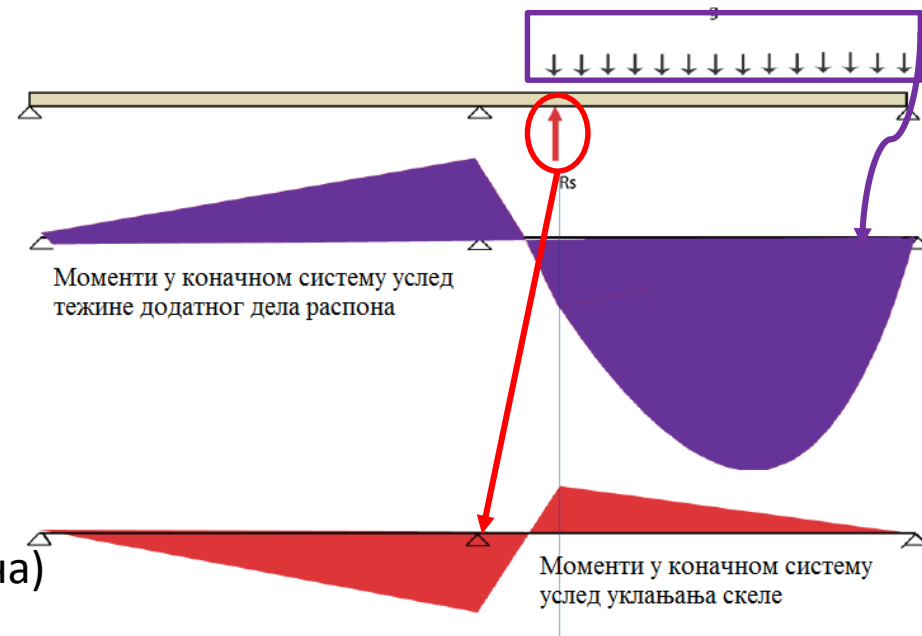
Након уклањања скеле прве фазе активира се сопствена тежина изведеног дела



Скела се помера у следеће поље и ослања на изведени део који је оптерећен реакцијом скеле (од њене тежине и тежине свежег бетона)



Систем 2 – континуални носач

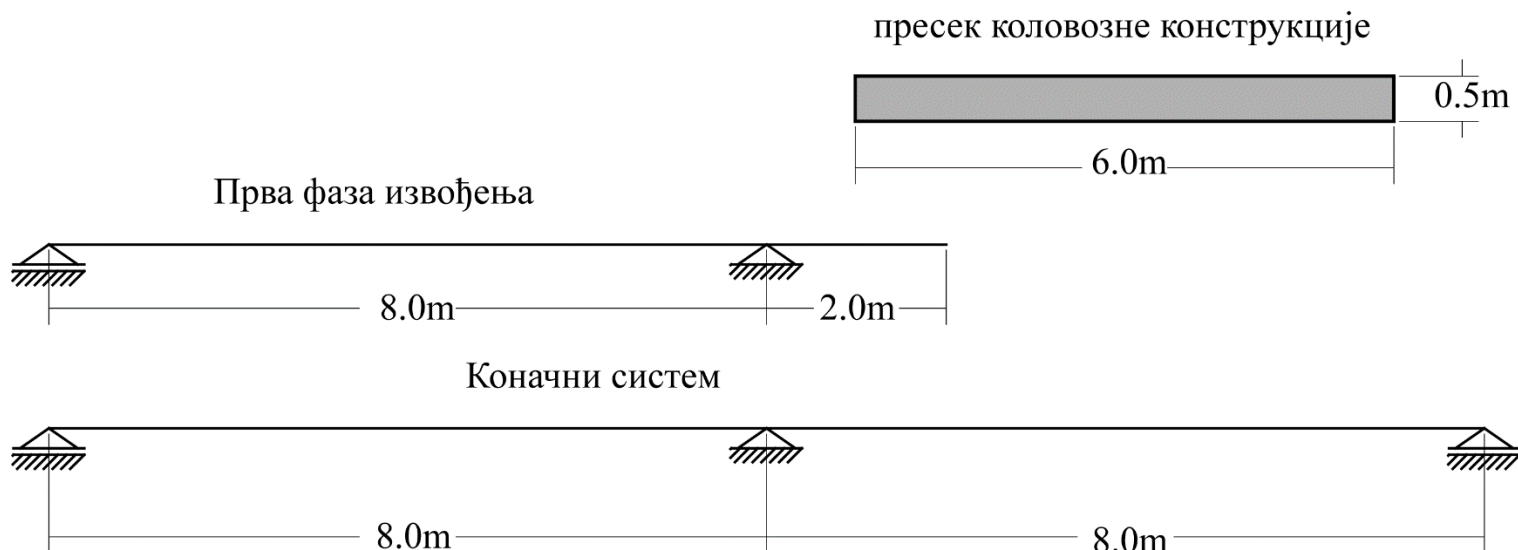


Моментни дијаграм од сопствене тежине у систему је суперпониран из различитих фаза али под условом да се пресек не мења.

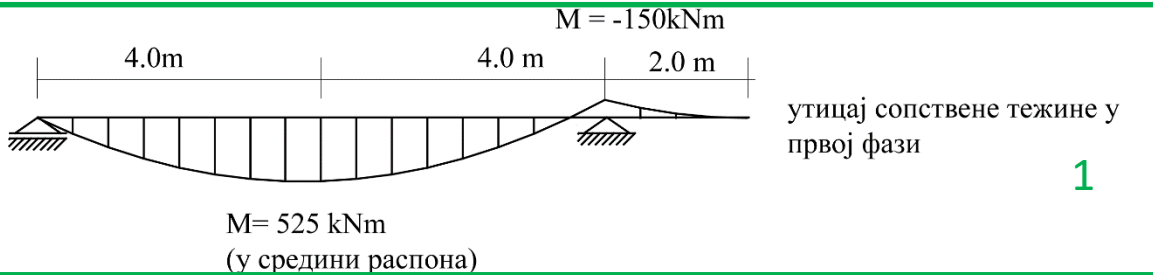
ПРИМЕР 1 – Извођење поље по поље

Плочасти мост система континуалне греде на два поља распона од по 8.0 m, изводи се на следећи начин:

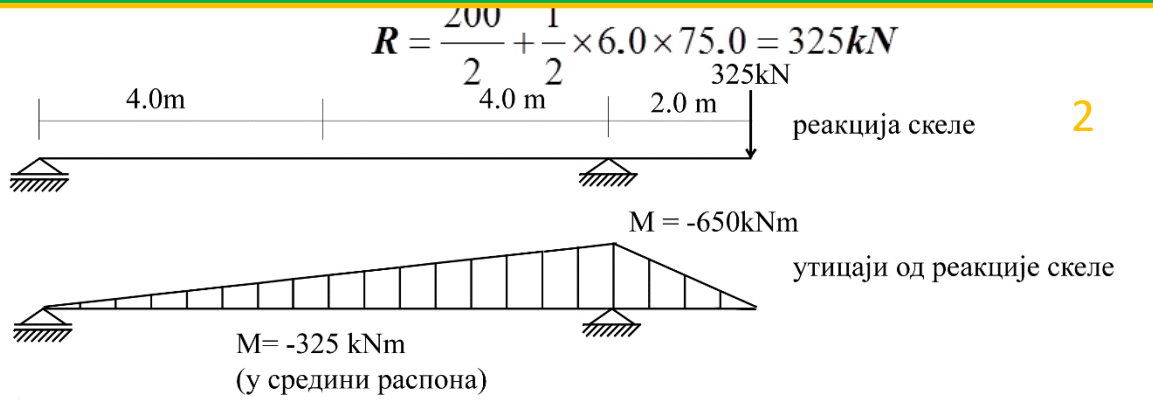
- на скели се бетонира 10 m дужине моста (систем греде са препустом) уз испуштање арматуре за везу са преосталим делом моста
- након очвршћавања бетона овог дела моста, поставља се скела у преосталом делу другог распона, па се на њој бетонира преостали део моста. **Скела се ослања на изведени део конструкције и десни опорац. Усвојити да је укупна тежина скеле 200 kN.**
- након очвршћавања бетона преосталог дела моста и споја са претходним делом, **уклања се скела и у другом пољу** и мост добија остатак сталног терета од 2.0 kN/m^2 . На мост делује саобраћајно оптерећење у износу од $p = 10.0 \text{ kN/m}^2$.



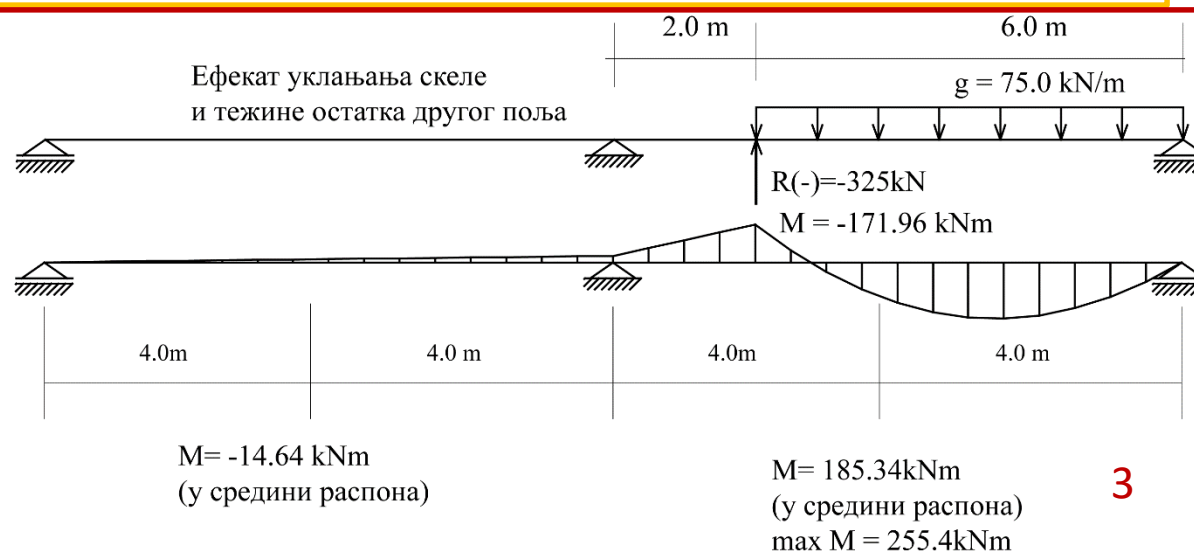
$$g = 6.0 \times 0.5 \times 25 = 75 \text{ kN} / \text{m}$$



1



2



3

Да је читав носач бетониран на скели утицаји услед сопствене тежине над ослонцем би износили **$M_o = -600 \text{ kNm}$** , кад је извођен на приказани начин момент од сопствене тежине над средњим ослонцем износи **$M_o = -800 \text{ kNm}$** . Наравно, моменти у пољима су мањи при посматраном начину извођења и то: Средина поља **$M_{p,s} = 185 \text{ kNm}$** насупротив **$336 \text{ kNm}$** да је изведен на скели.

$$\Delta g = 6.0 \times 2.0 = 12 \text{ kN} / \text{m}$$

$$p = 6.0 \times 10.0 = 60 \text{ kN} / \text{m}$$

Средњи ослонац:

$$M_{\Delta g} = 96 \text{ kNm},$$

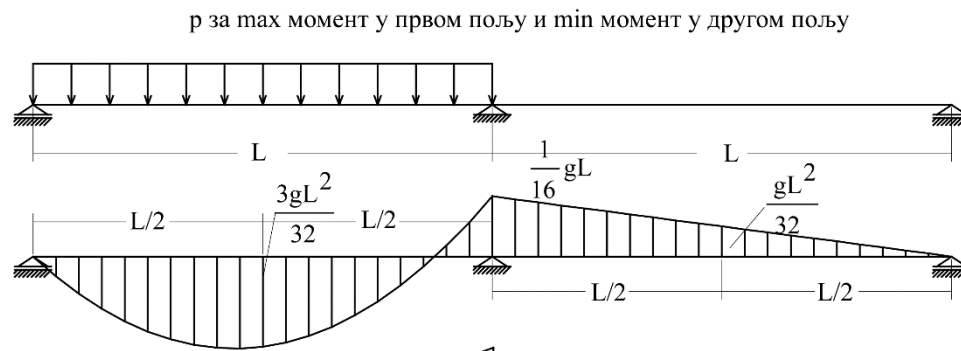
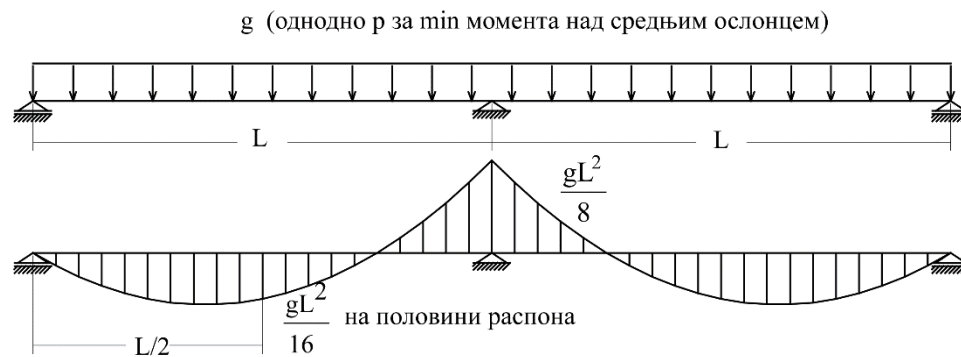
$$\min M_p = -480 \text{ kNm}$$

Средине поља:

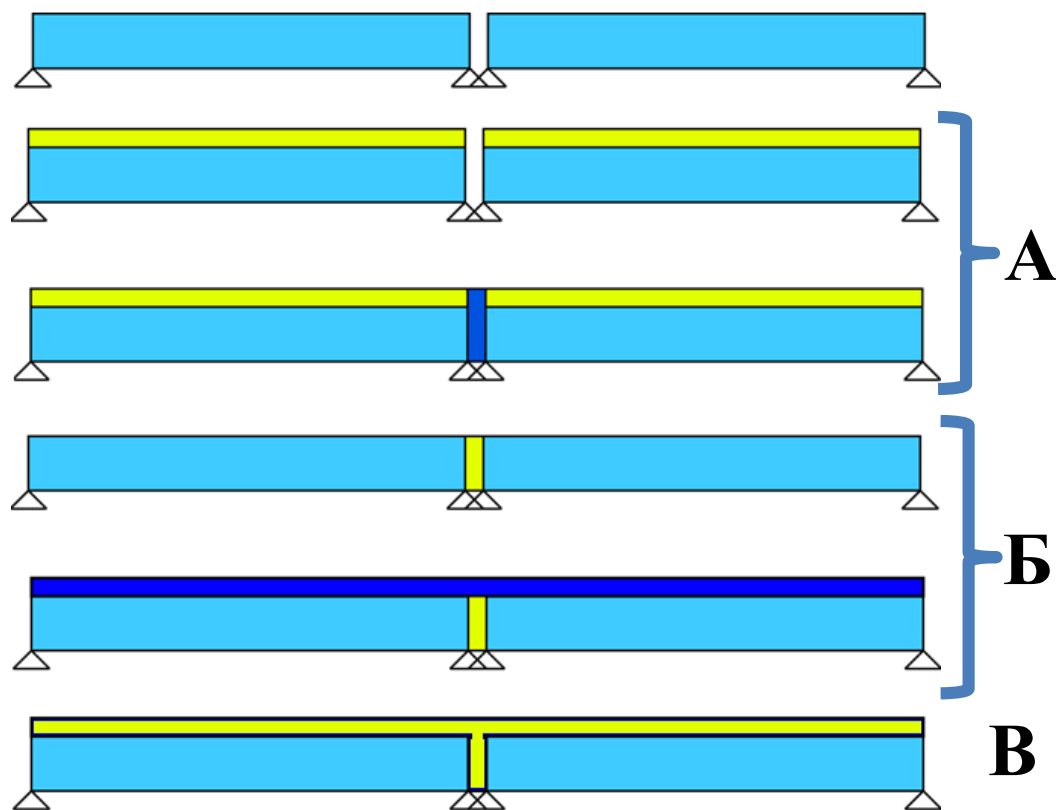
$$M_{\Delta g} = 48 \text{ kNm},$$

$$\max M_p = 360 \text{ kNm},$$

$$\min M_p = -8 \text{ kNm}$$



Извођење постављањем префабрикованих носача читавог распона



А – Бетонирање
плоче па бетонирање
чвора

Б – Бетонирање
чвора па бетонирање
плоче

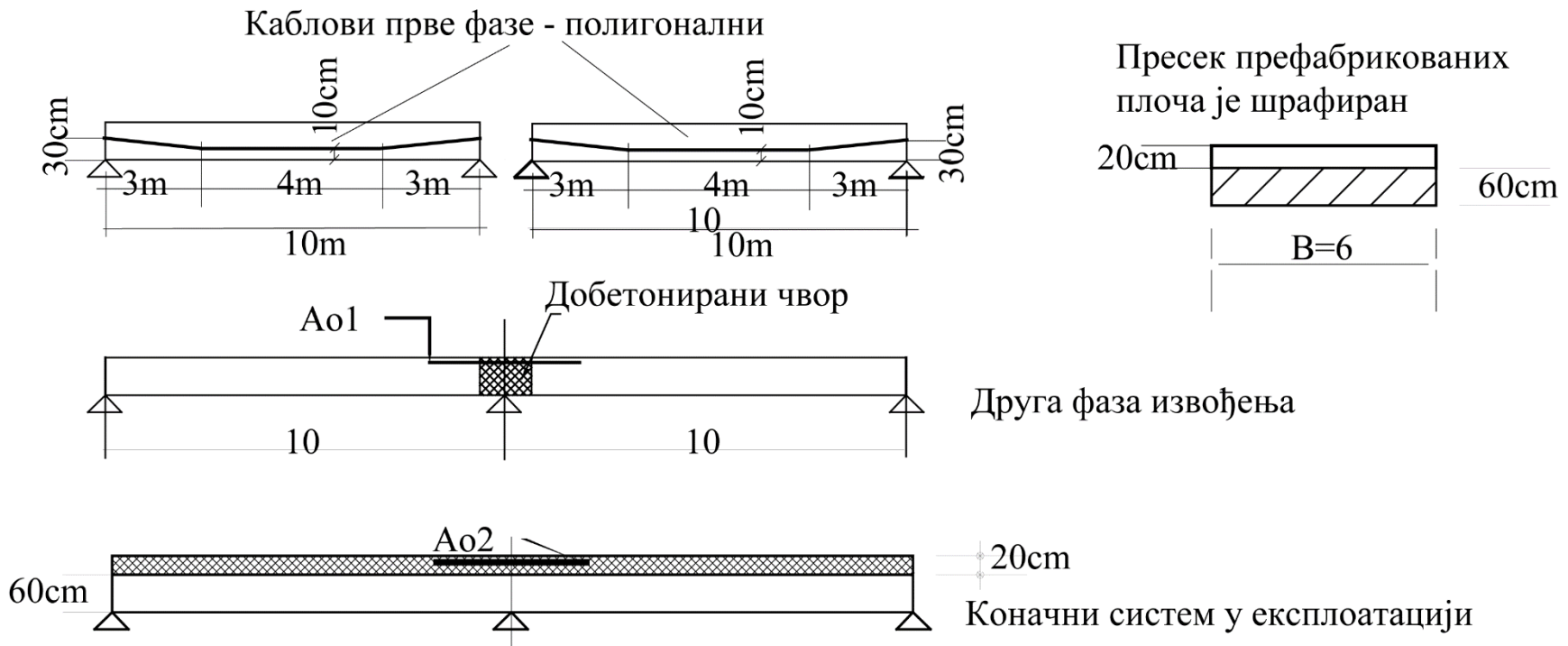
В – Истовремено
бетонирање плоче и
чвора

ПРИМЕР 2 – Континуирани гредни мостови

Конструкција плочастог моста изводи се у фазама (видети слику):

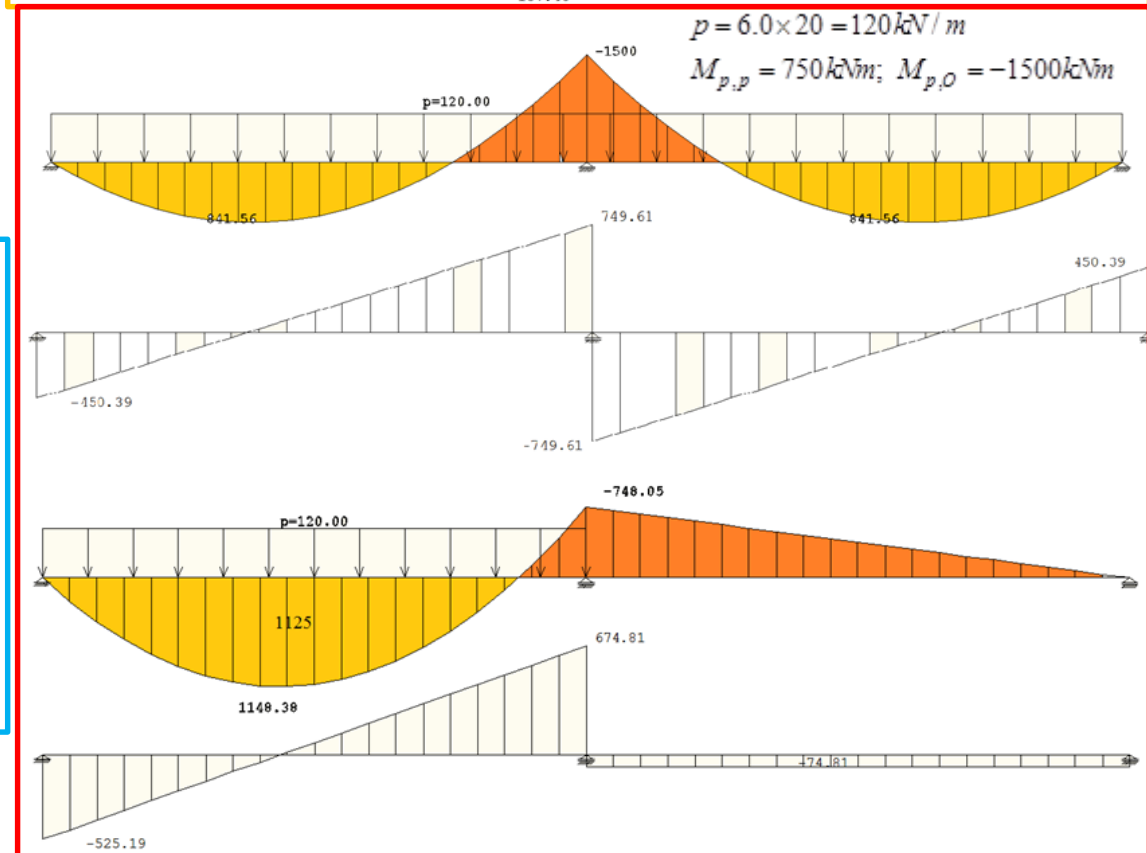
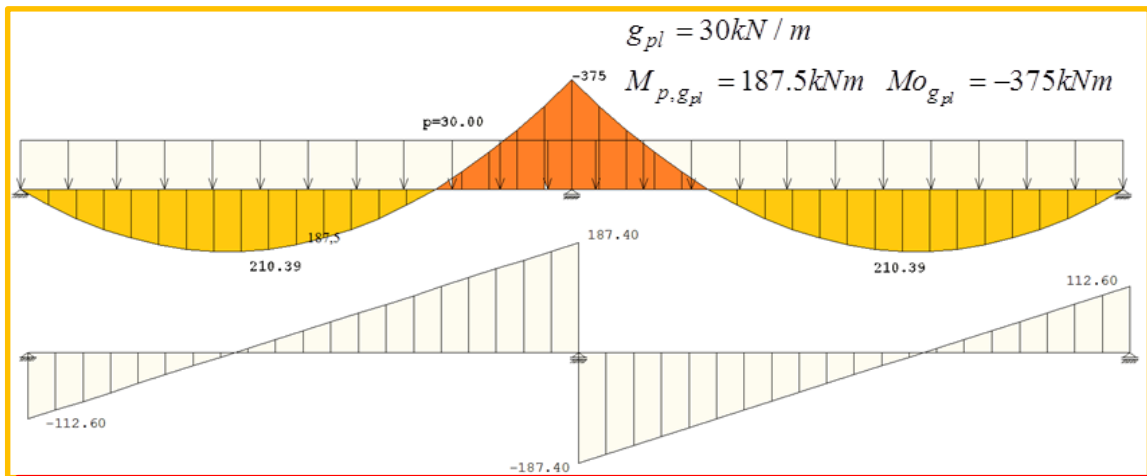
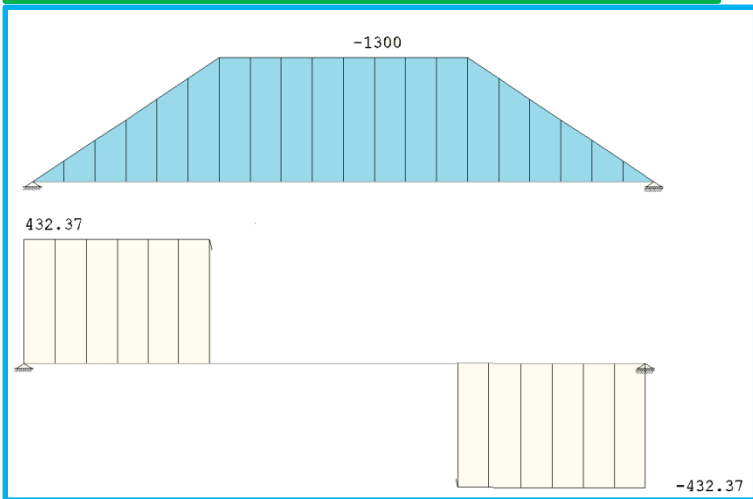
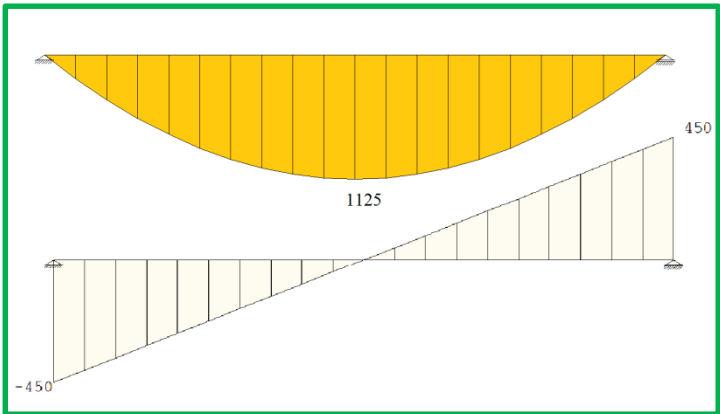
Фаза 1: Монтирају се две претходно напрегнуте плоче система просте греде распона по 10.0 m. Висина плоча је 60 cm а ширина 6.0 m. Полигонална траса каблова је дата на скици $N_k=6500\text{kN}$. Из плоча је препуштена арматура за везу са суседним пољем (A_{o1}).

Фаза 2: Бетонира се простор између плоча. Затим се, након очвршћавања бетона споја бетонира додатни слој плоче дебљине 20 cm уз постављање арматуре изнад средњег ослонца у плочи (A_{o2}). Усвојити да на коначни систем делује корисно оптерећење од 20.0 kN/m^2 по целој ширини плоче. Ово оптерећење се може наћи у произвољном положају и може бити произвољне дужине.



$$g = 90 \text{ kN/m} \quad Mg = 1125 \text{ kNm}$$

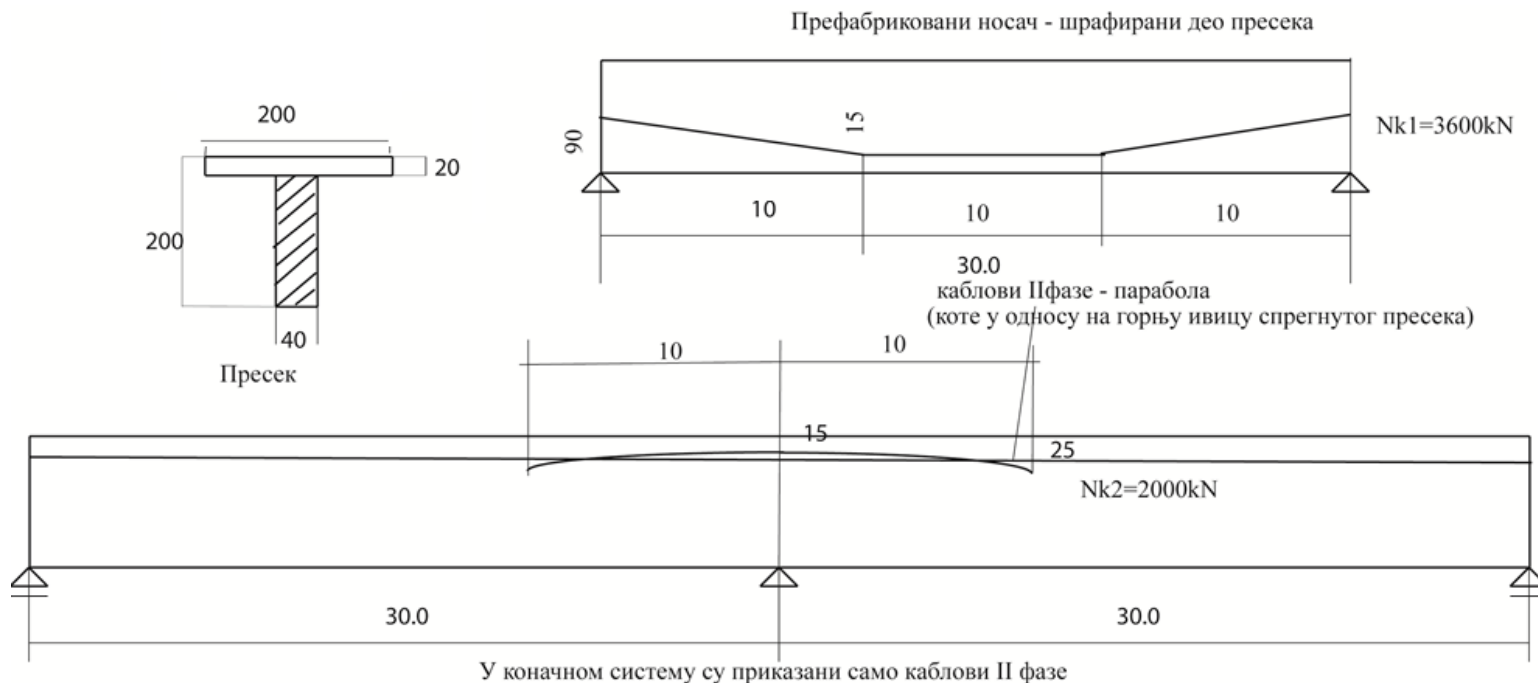
$$Nk = 6500 \quad Mk = -1300 \text{ kNm}$$



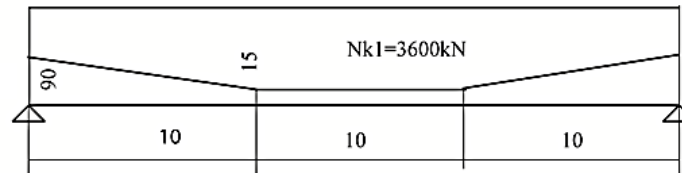
ПРИМЕР 3 - Континуирани гредни мостови

Мост се изводи на следећи начин:

1. Префабриковани претходно напрегнути носач (попречног пресека приказаног као шрафирана површина на скици) са трасом каблова приказаном на скици, се поставља на ослонце на стубовима,
 2. Бетонира се коловозна плоча остављајући део између носача у чвору неизбетонираним,
 3. Након очвршћавања бетона плоче бетонира се чвор над средњим ослонцем,
 4. Након очвршћавања бетона чвора утежу се каблови друге фазе,
- Припадајући стални терет по носачу износи 4 kN/m .
Припадајуће саобраћајно оптерећење износи 15 kN/m .



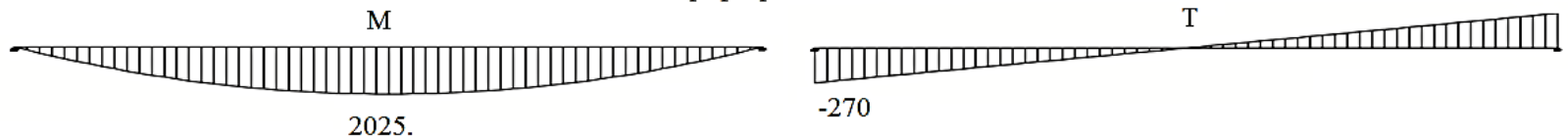
Фаза 1 – проста греди правоугаоног пресека



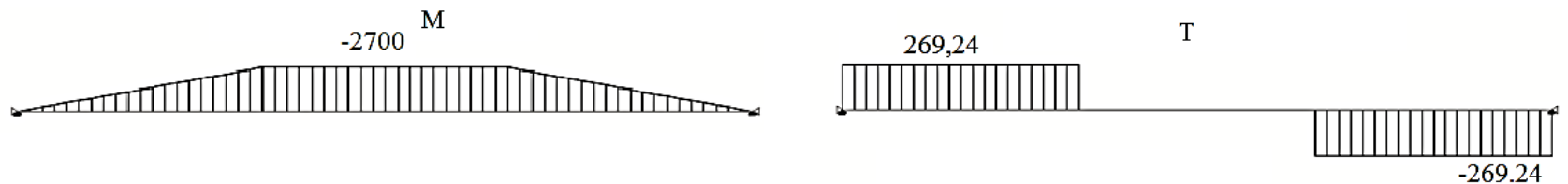
$$F = 0.72 \text{ m}^2; y_{T,d} = 0.9 \text{ m}$$

$$g = 18 \text{ kN / m}$$

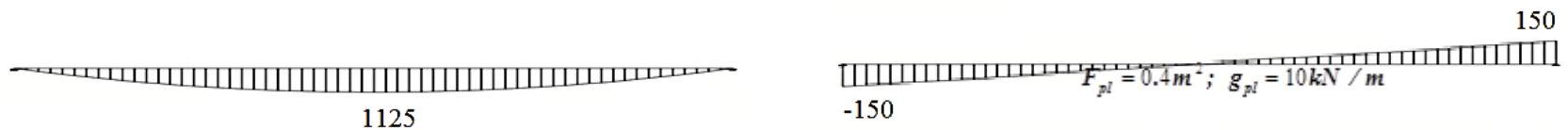
тежина префабрикованог носача



каблови у префабрикованом носачу

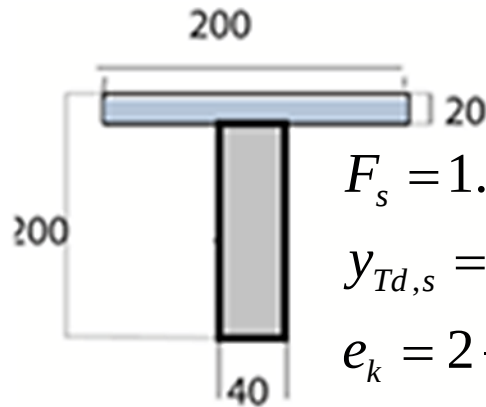


тежина припадајуће коловозне плоче



$$F_{pl} = 0.4 \text{ m}^2; g_{pl} = 10 \text{ kN / m}$$

Фаза 2 – спрегнут пресек



$$F_s = 1.12 m^2$$

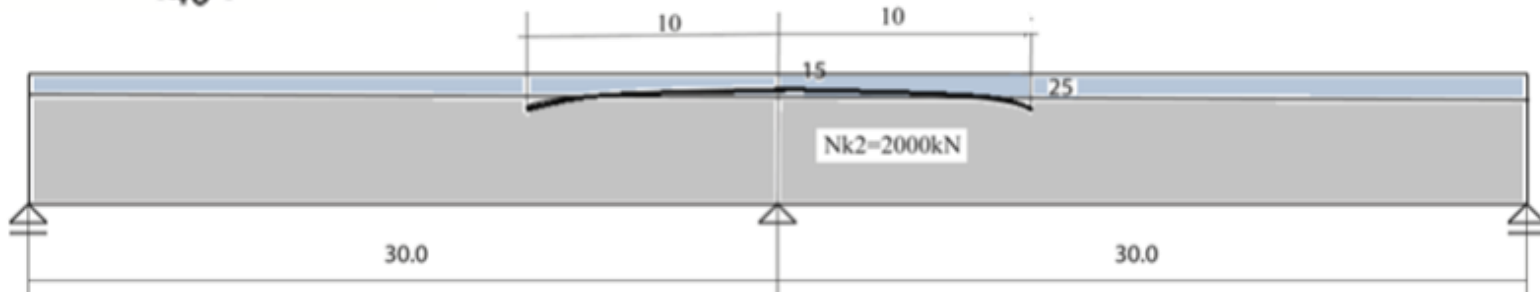
$$y_{Td,s} = 1.257 m;$$

$$e_k = 2 - 1.257 - 0.25 = 0.943 m$$

$$F_s = 1.12 m^2; y_{Td,s} = 1.257 m;$$

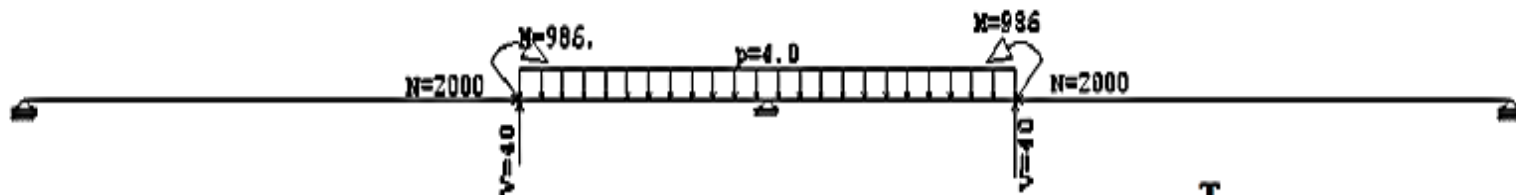
$$e_k = 0.493 m; M_k = 986 kNm; V = 40 kN$$

$$f = 0.1 m \quad q_{ek} = 4.0 kN / m;$$



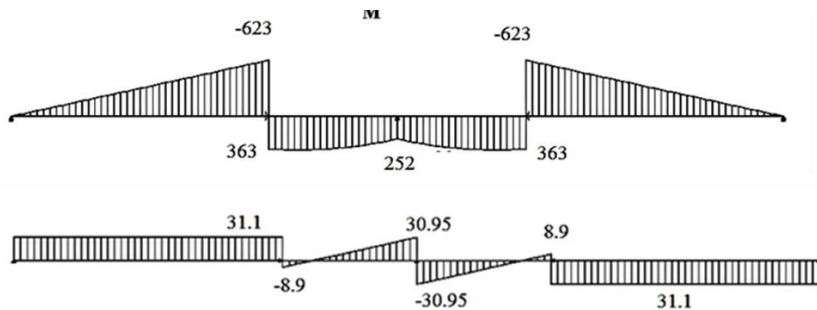
$$f = 0.25 - 0.15 = 0.1 m \quad q_{eq} = 4.0 kN / m \downarrow$$

$$V = 40 kN \uparrow \quad M = 2000 \cdot 0.493 = 986 kNm$$

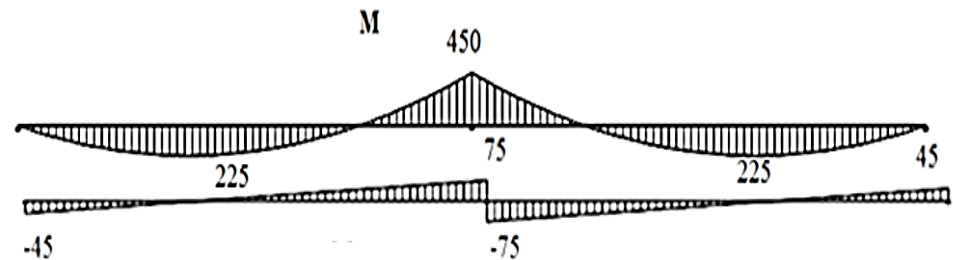


Утицаји од оптерећења у коначном систему

Од друге фазе каблова



Услед додатног сталног терета од 4 kN/m



Услед саобраћајног једнакоподелјеног оптерећења у првом пољу од 15 kN/m

