



Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet
www.grf.bg.ac.rs

Studijski program: **Građevinarstvo**

Godina/Semestar: **III godina / V semestar**

Naziv predmeta (šifra): **Teorija betonskih konstrukcija 1**

Nastavnik: **Ivan Ignjatović**

Naslov predavanja: **Krstasto armirane ploče i podvlake**

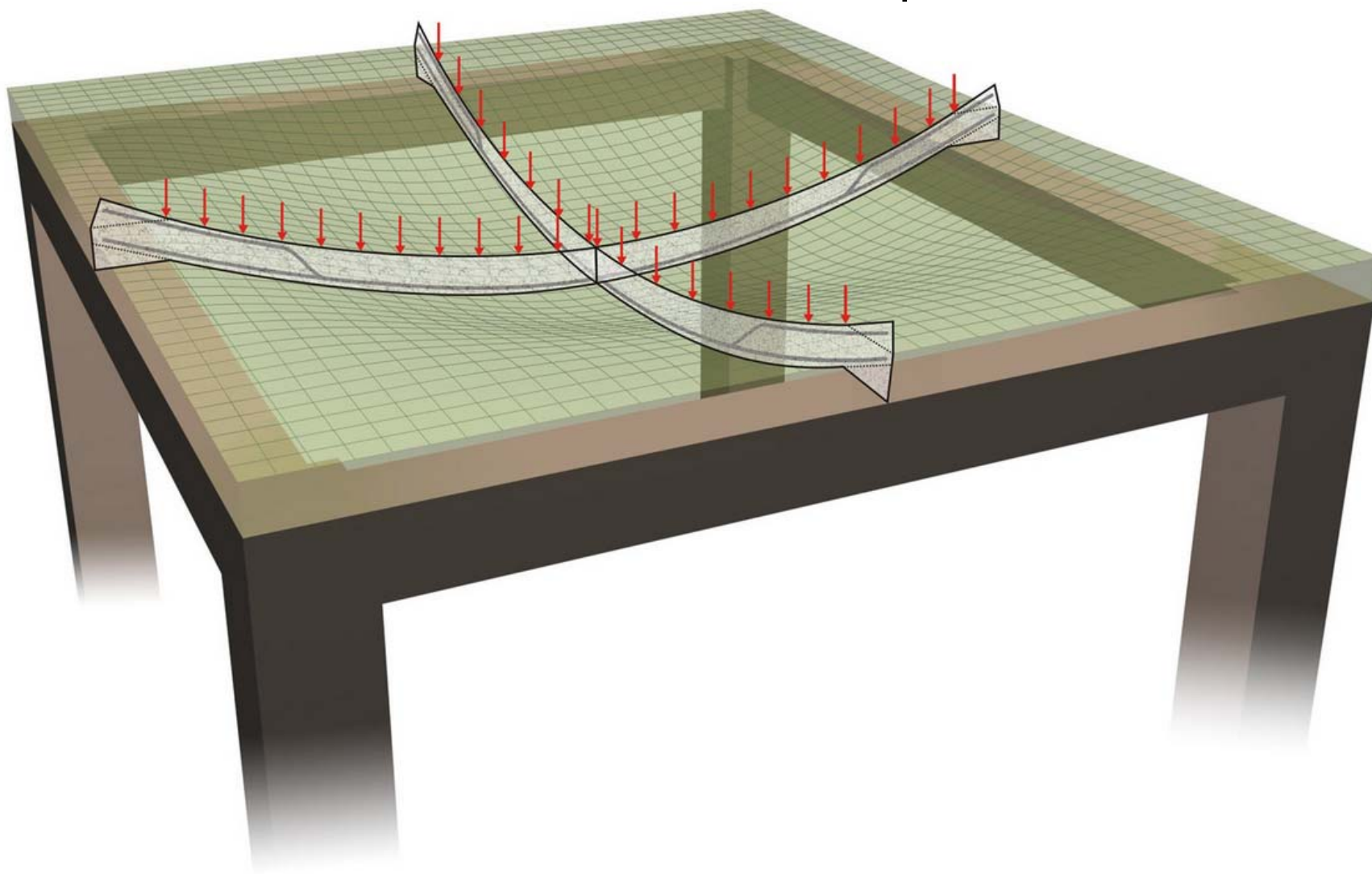
Datum : **28.11.2024.**

Beograd, 2020.

Sva autorska prava autora prezentacije i/ili video snimaka su zaštićena. Snimak ili prezentacija se mogu koristiti samo za nastavu na daljinu studenta Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu u školskoj 2020/2021 i ne mogu se koristiti za druge svrhe bez pismene saglasnosti autora materijala.

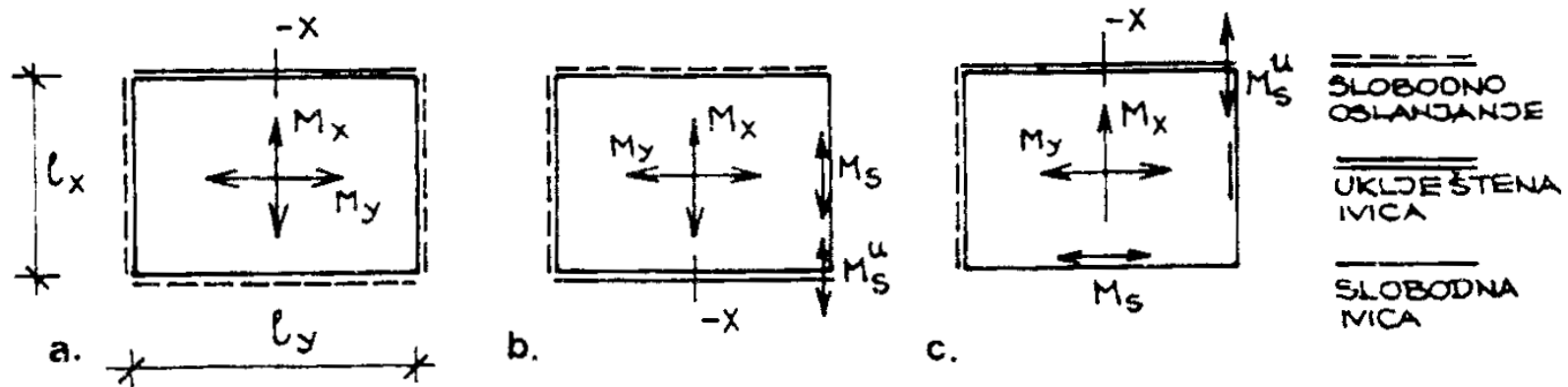
1. Elementi konstrukcije armiranobetonskih objekata
2. Monolitne međuspratne konstrukcije
 - 2.1. Ploče u jednom pravcu
 - 2.2. Krstasto armirane ploče
 - 2.3. Podvlake
3. Polumontažne međuspratne konstrukcije
 - 3.1. "TM" tavanice
 - 3.2. "KAT" tavanice
 - 3.3. Tavanice sistema "Avramenko"
 - 3.4. "OMNIA" tavanice
4. Montažne međuspratne konstrukcije
 - 4.1. Durisol ploče
 - 4.2. Armiranobetonske korube
 - 4.3. Ošupljene ploče

2.2. Krstasto armirane ploče



2.2. Krstasto armirane ploče

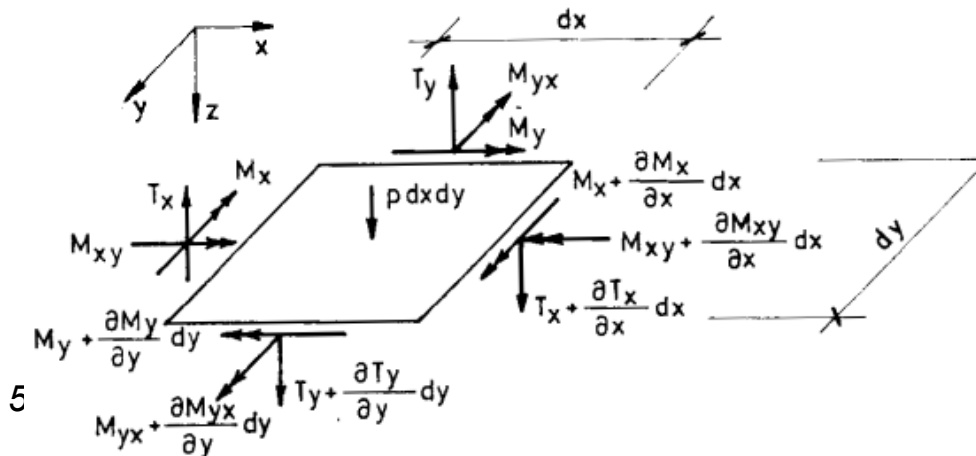
- Ravni površinski nosači, linijski oslonjeni na grede ili zidove sa odnosom raspona koji zadovoljava uslov $I_y/I_x < 2.0$
- Debljina je mala u odnosu na druge dve dimenzije, pa se za proračun može primeniti teorija elastičnosti
- Ploče mogu biti oslonjene na sve četiri strane, sa jednom ili dve slobodne ivice
- Opterećenje koje deluje upravno na srednju ravan ploče izaziva momente savijanja M_x i M_y kao i torzione momente M_{xy}



2.2. Krstasto armirane ploče

- Pretpostavke za proračun:
 - Deformacije (ugibi) srednje ravni su male u odnosu na debljinu ploče
 - Tačke koje su na normali na srednju površ ostaju na pravoј koja je upravna na deformisanu površ
 - Vlakena u srednjoj ravni ploče pri deformacijama ne menjaju dužinu

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P_{(x,y)}}{K}$$



Postavljanjem uslova ravnoteže za elementarni isečak ploče i koristeći veze između deformacija i presečnih sila, dobija se linearna nehomogena parcijalna diferencijalna jednačina četvrtog stepena koja definiše elastičnu površ ploče pod datim opterećenjem p

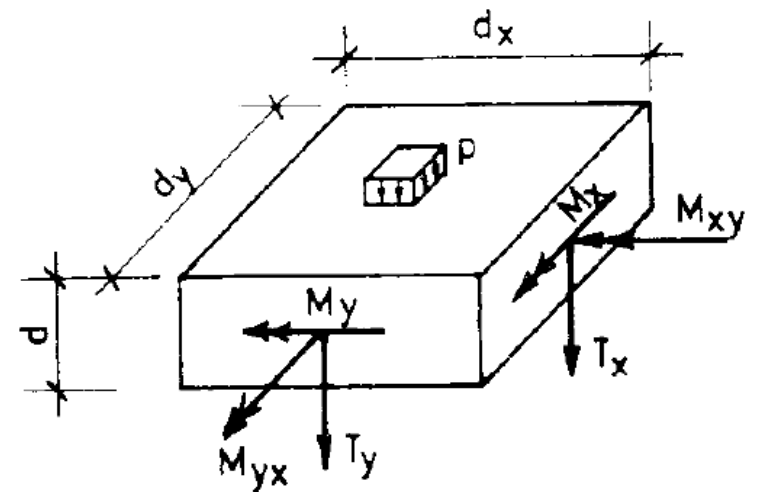
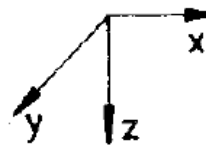
2.2. Krstasto armirane ploče

- Rešavanjem diferencijalne jednačine, uz zadate konturne uslove, dobija se funkcija elastične površine ploče $w(x,y)$ i kada je ona poznata, mogu se sračunati sve presečne sile u ploči

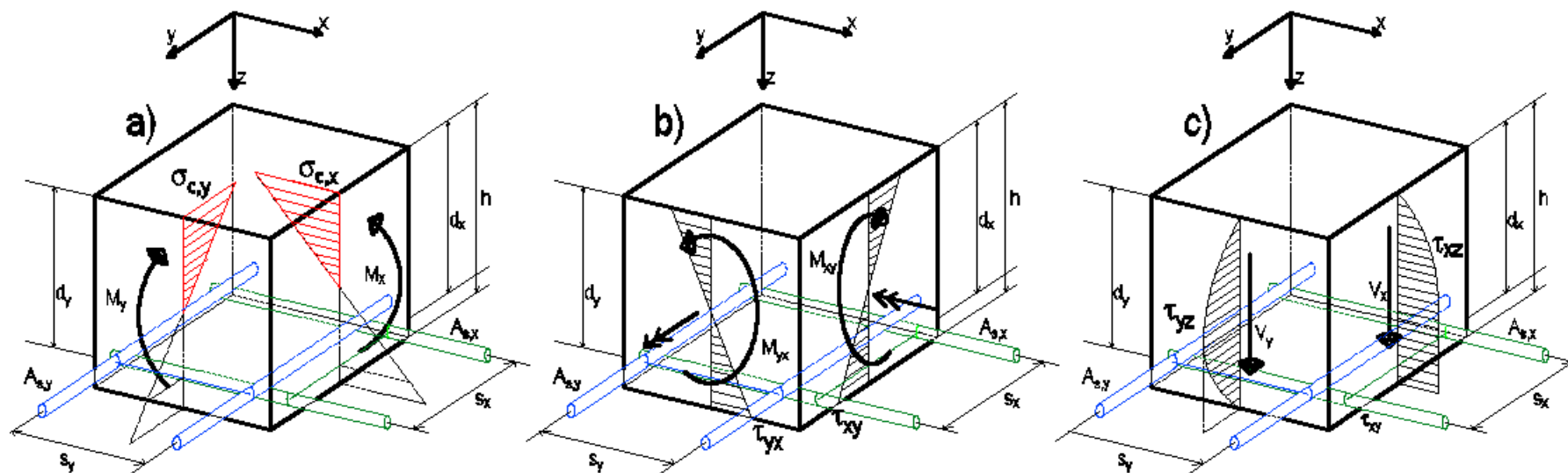
$$M_x = -K \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad K = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$M_y = -K \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = -(1 - \nu)K \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$$

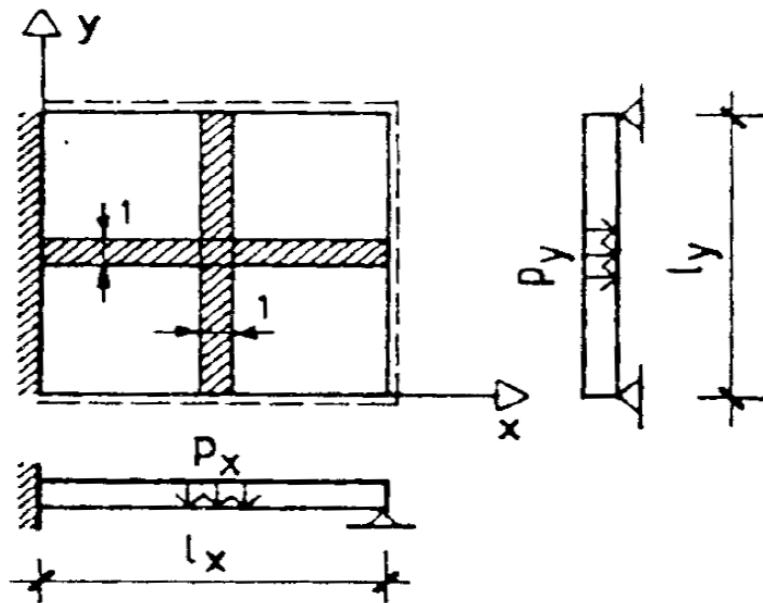


Uticaji i naprezanja ploče u dva pravca



2.2. Krstasto armirane ploče

- Približan proračun - Markusova metoda zamenjujućih traka
 - Iz ploče se izdvajaju dve srednje trake iz dva ortogonalna pravca, širine 1m
 - Isti ugibi $w_x = w_y$ i isti momente inercije ($I_x = I_y$)
 - Pripadajuće opterećenje (p_x, p_y)

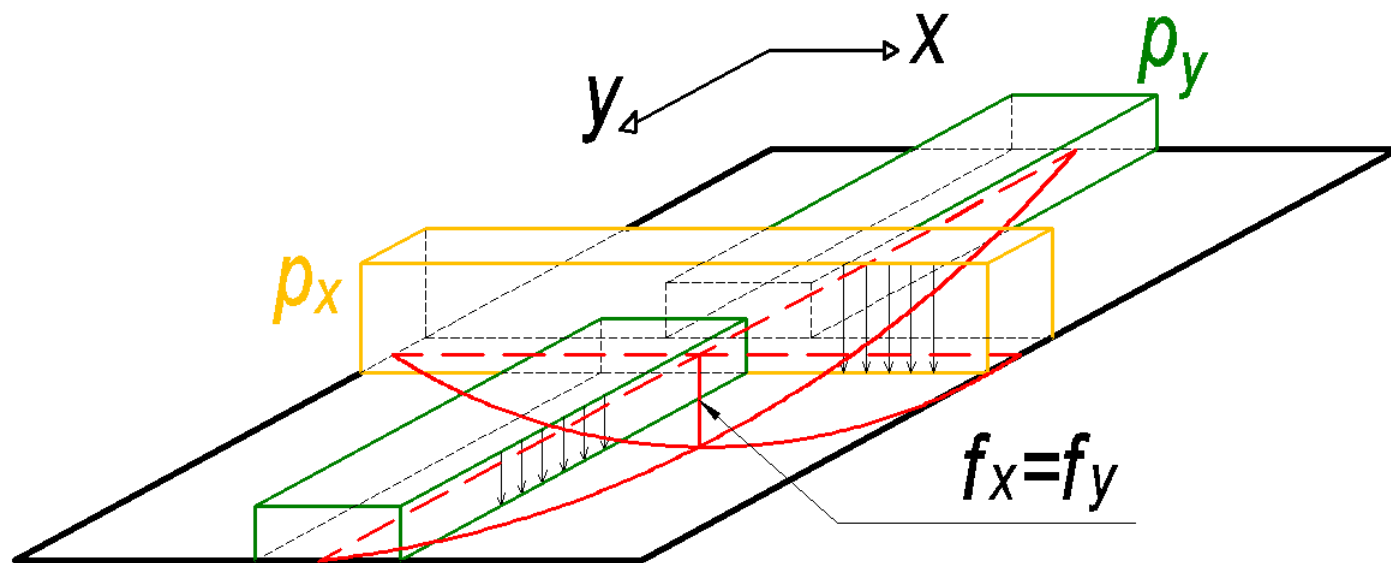


$$w_x = \alpha_x \frac{p_x l_x^4}{EI_x} \quad w_y = \alpha_y \frac{p_y l_y^4}{EI_y}$$

$$M_x = \frac{p_x l_x^4}{\beta_x} \quad M_y = \frac{p_y l_y^4}{\beta_y}$$

$$M_{xy} = 0$$

$$p_x = \frac{L_y^4}{L_x^4 + L_y^4} p = k_x Q, \quad p_y = \frac{L_x^4}{L_x^4 + L_y^4} p = k_y Q$$



Proračun korišćenjem tablica

Proračun pogodan za praktičnu inženjersku primenu.

U literaturi su date tabele sa koeficijentima k_i za proračun maksimalnih vrednosti momenta savijanja u polju i na osloncima.

Momenti se dobijaju kao:

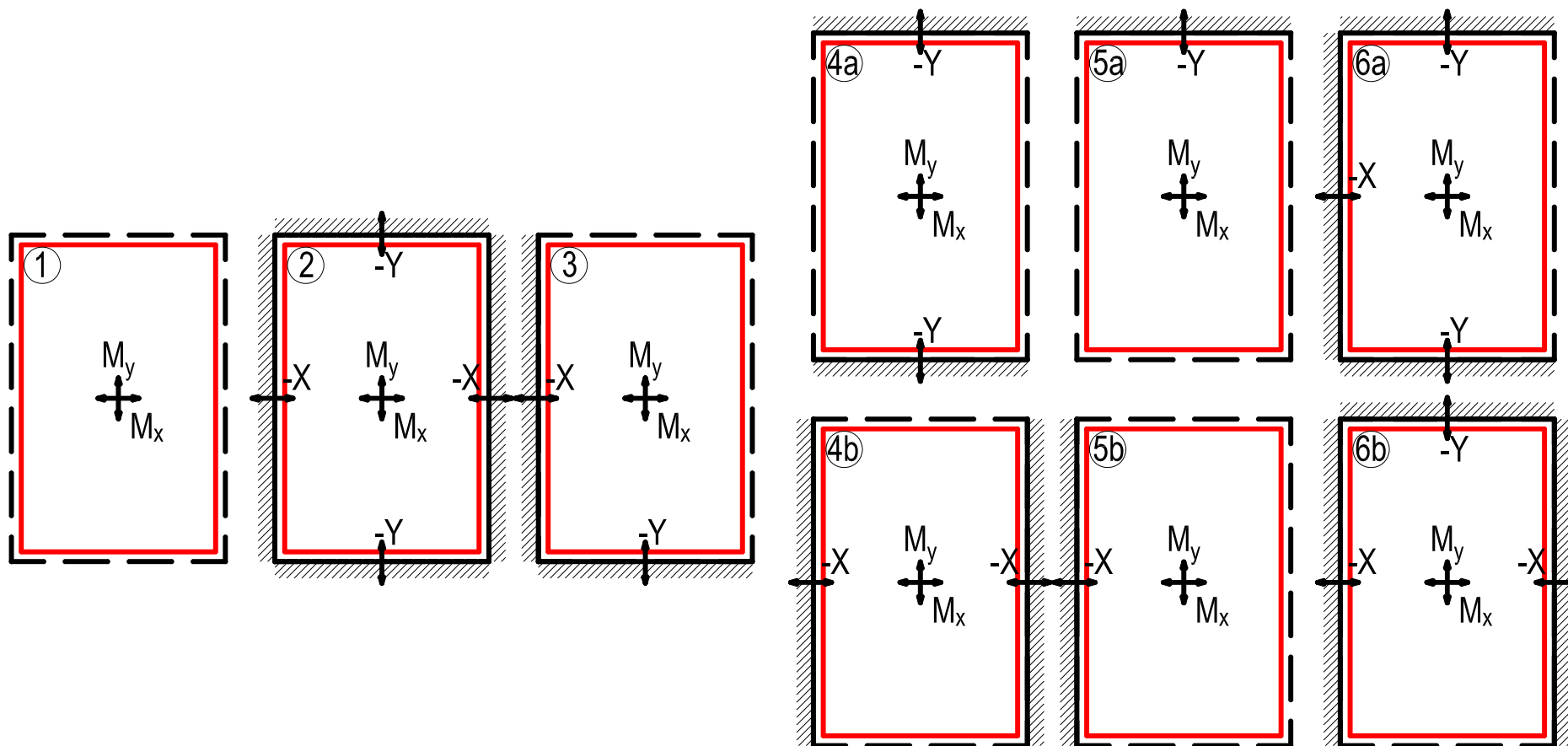
$$M_i = k_i \times P \text{ [kNm/m]}, \quad \text{gde je } P = p \times L_x \times L_y.$$

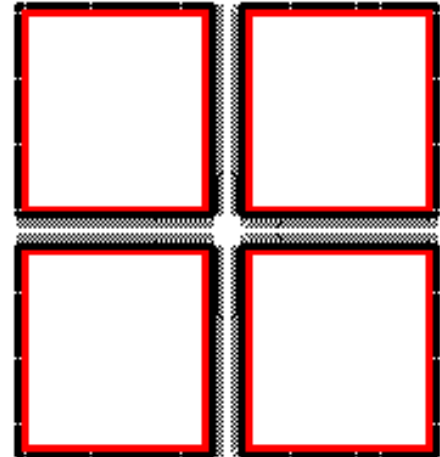
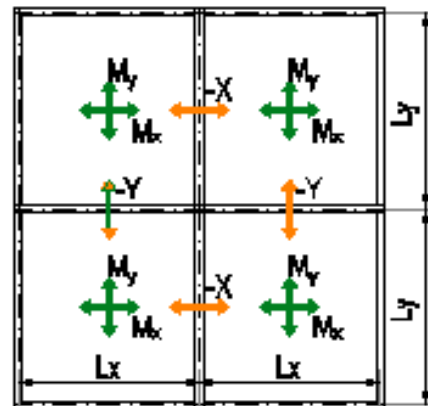
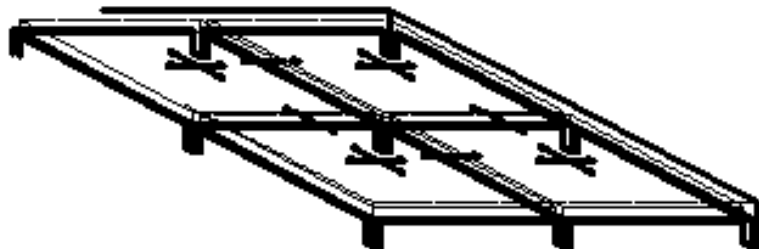
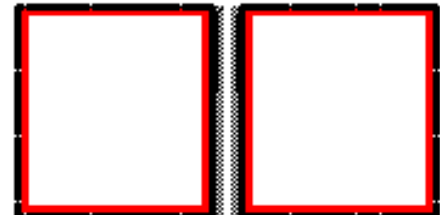
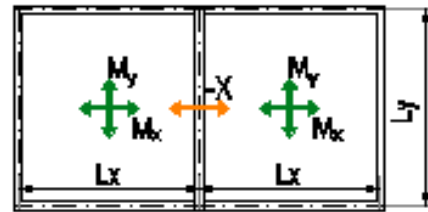
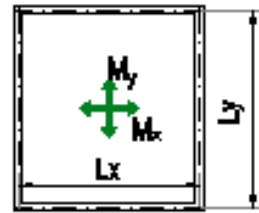
U tabeli su po vrstama dati različiti tipovi oslanjanja, a po kolonama različiti odnosi raspona L_y/L_x , u intervalu od 1.0 do 2.0.

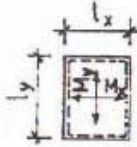
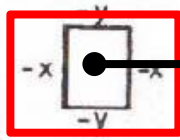
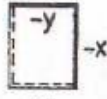
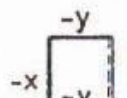
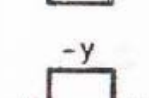
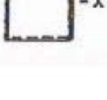
Ukoliko odnos raspona na konkretnoj ploči nije jednak ponuđenim vrednostima, može se izvršiti interpolacija između vrednosti iz susednih kolona.

Tabulisane su vrednosti koeficijenata za karakteristične uticaje (polje, oslonac) za različite odnose raspona i načine oslanjanja.

POJEDINAČNE PLOČE – TABLIČNI SLUČAJEVI



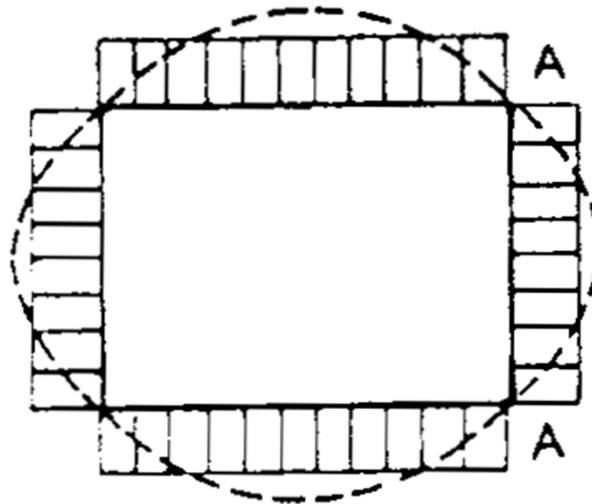


		$l_y:l_x$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0		
		Mx	0,044	0,047	0,049	0,051	0,052	0,052	0,053	0,052	0,052	0,051	0,050		
		My	0,044	0,041	0,038	0,034	0,032	0,029	0,026	0,024	0,022	0,020	0,019		
uključena ivica — slobodno ostonjena ivica		Mx	0,021	0,023	0,023	0,024	0,020	0,020	0,023	0,022	0,022	0,021	0,021	P	$q l_x l_y$ (kN)
		My	0,021	0,019	0,017	0,015	0,013	0,011	0,010	0,008	0,007	0,006	0,006		
		-X	0,052	0,054	0,053	0,053	0,052	0,051	0,049	0,048	0,046	0,044	0,042		
		-Y	0,052	0,049	0,047	0,044	0,041	0,038	0,036	0,034	0,032	0,030	0,029		
		Mx	0,028	0,030	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,031	0,031	0,030	0,029		
		My	0,028	0,025	0,023	0,021	0,019	0,017	0,014	0,014	0,012	0,011	0,010		
		-X	0,068	0,070	0,071	0,071	0,070	0,069	0,067	0,065	0,063	0,061	0,059		
		-Y	0,068	0,065	0,062	0,059	0,055	0,051	0,049	0,046	0,043	0,041	0,040		
		Mx	0,022	0,026	0,028	0,032	0,035	0,037	0,039	0,040	0,041	0,042	0,043		
		My	0,032	0,032	0,031	0,030	0,029	0,027	0,026	0,024	0,023	0,021	0,020		
		-Y	0,070	0,072	0,073	0,072	0,072	0,070	0,068	0,066	0,064	0,062	0,060		
		Mx	0,032	0,031	0,030	0,029	0,028	0,027	0,026	0,024	0,023	0,022	0,021	M	$k_i P$ (kNm/m)
		My	0,022	0,018	0,015	0,013	0,011	0,009	0,008	0,007	0,006	0,005	0,005		
		-X	0,070	0,067	0,064	0,061	0,058	0,055	0,052	0,050	0,047	0,044	0,042		
		Mx	0,031	0,035	0,038	0,041	0,043	0,044	0,045	0,046	0,046	0,046	0,046		
		My	0,037	0,036	0,034	0,032	0,030	0,028	0,026	0,024	0,022	0,021	0,019		
		-Y	0,084	0,084	0,083	0,080	0,078	0,075	0,072	0,069	0,066	0,064	0,061		
		Mx	0,037	0,037	0,038	0,037	0,037	0,035	0,034	0,033	0,032	0,031	0,030		
		My	0,031	0,027	0,023	0,021	0,018	0,016	0,014	0,012	0,011	0,010	0,009		
		-X	0,084	0,084	0,082	0,079	0,077	0,074	0,071	0,069	0,066	0,063	0,061		
		Mx	0,021	0,024	0,026	0,028	0,029	0,029	0,029	0,029	0,028	0,028	0,028		
		My	0,026	0,025	0,023	0,022	0,019	0,017	0,016	0,014	0,012	0,011	0,011		
		-X	0,055	0,059	0,062	0,063	0,064	0,063	0,062	0,061	0,059	0,058	0,057		
		-Y	0,060	0,059	0,058	0,055	0,053	0,051	0,048	0,046	0,043	0,041	0,039		
		Mx	0,021	0,023	0,023	0,024	0,020	0,020	0,023	0,022	0,022	0,021	0,021	M	$k_i P$ (kNm/m)
		My	0,021	0,019	0,017	0,015	0,013	0,011	0,010	0,008	0,007	0,006	0,006		
		-X	0,052	0,054	0,053	0,053	0,052	0,051	0,049	0,048	0,046	0,044	0,042		
		-Y	0,052	0,049	0,047	0,044	0,041	0,038	0,036	0,034	0,032	0,030	0,029		
		Mx	0,028	0,030	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,031	0,031	0,030	0,029		
		My	0,028	0,025	0,023	0,021	0,019	0,017	0,014	0,014	0,012	0,011	0,010		
		-X	0,068	0,070	0,071	0,071	0,070	0,069	0,067	0,065	0,063	0,061	0,059		
		-Y	0,068	0,065	0,062	0,059	0,055	0,051	0,049	0,046	0,043	0,041	0,040		
		Mx	0,022	0,026	0,028	0,032	0,035	0,037	0,039	0,040	0,041	0,042	0,043		
		My	0,032	0,032	0,031	0,030	0,029	0,027	0,026	0,024	0,023	0,021	0,020		
		-Y	0,070	0,072	0,073	0,072	0,072	0,070	0,068	0,066	0,064	0,062	0,060		

2.2. Krstasto armirane ploče

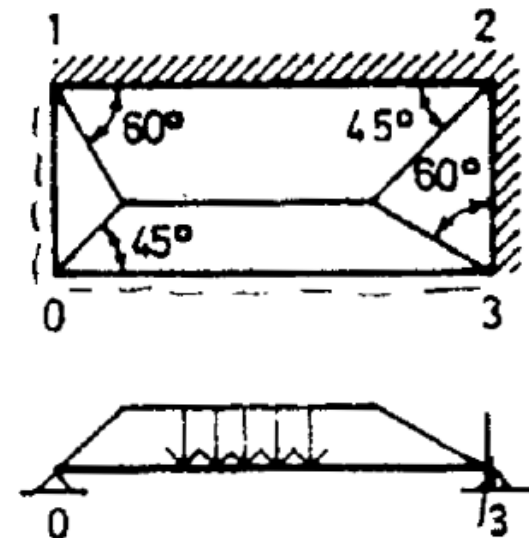
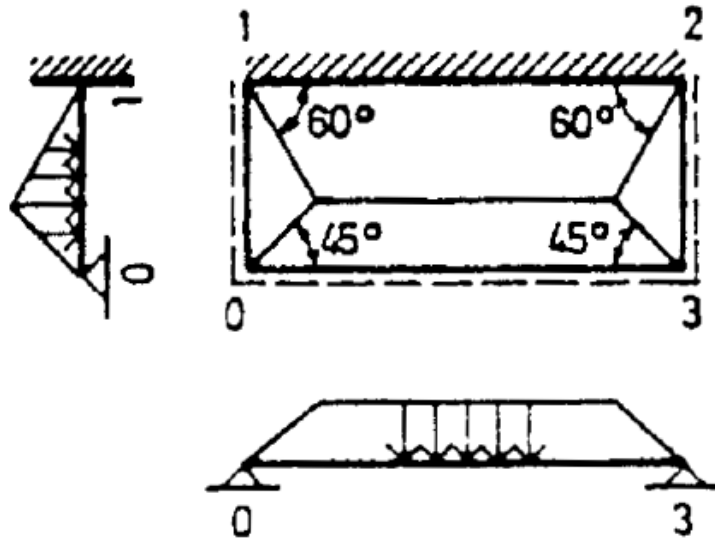
- Kod krstasto armiranih ploča opterećenih jednako raspodeljenim opterećenjem, raspodela reakcija duž oslonjene ivice u stvarnosti je parabolična
- U praktičnim proračunima dovoljno je tačno usvojiti prosečne vrednosti ovih reakcija
- Za odnos raspona l_y/l_x i tip ploče, iz tabela se nalazi vrednost koeficijenta r_i i ukupna reakcija ploče na strani i se dobija iz izraza:

$$Q_i = r_i P$$
$$P = q l_x l_y$$



2.2. Krstasto armirane ploče

- Koeficijent r_i predstavlja procenat raspodele ukupnog opterećenja sa ploče na njene oslonce u funkciji odnosa strana i uslova oslanjanja
- U nedostatku tabela, reakcije oslonaca se mogu dovoljno tačno odrediti i preko pripadajućih površina



Koeficijenti r_j za određivanje rezultante reakcije oslonca kristalo armirane ploče,
oslonjene na sve četiri strane, opterećenih jednako podeljenim opterećenjem q (kN/m²)

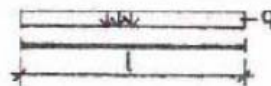
$$P = q l_x l_y \quad (kN) \quad Q = r_j P \quad (kN)$$

		$l_y:l_x$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
uključena ivica slobodno oslonjena ivica		Q_1	0,250	0,260	0,272	0,280	0,288	0,296	0,304	0,310	0,316	0,322	0,327
	Q_2	0,250	0,240	0,228	0,220	0,212	0,204	0,196	0,190	0,184	0,178	0,173	
	Q_1	0,220	0,232	0,244	0,254	0,264	0,273	0,281	0,290	0,296	0,302	0,308	
	Q_2	0,330	0,313	0,298	0,285	0,272	0,262	0,251	0,242	0,234	0,227	0,220	
	Q_1	0,230	0,223	0,214	0,207	0,200	0,192	0,187	0,178	0,174	0,169	0,164	
	Q_2	0,330	0,346	0,362	0,376	0,387	0,399	0,410	0,418	0,426	0,434	0,442	
	Q_1	0,220	0,207	0,196	0,186	0,178	0,170	0,163	0,156	0,150	0,145	0,140	
	Q_2	0,302	0,289	0,277	0,266	0,256	0,246	0,238	0,230	0,222	0,215	0,208	
	Q_1	0,302	0,315	0,326	0,334	0,342	0,350	0,356	0,361	0,367	0,372	0,377	
	Q_2	0,198	0,185	0,174	0,166	0,158	0,150	0,144	0,139	0,133	0,128	0,123	
	Q_1	0,292	0,313	0,331	0,346	0,360	0,370	0,380	0,390	0,400	0,410	0,419	
	Q_2	0,208	0,217	0,226	0,233	0,241	0,247	0,252	0,256	0,260	0,263	0,266	
	Q_1	0,292	0,274	0,257	0,244	0,230	0,221	0,212	0,204	0,196	0,189	0,182	
	Q_2	0,208	0,196	0,186	0,177	0,169	0,162	0,156	0,150	0,144	0,138	0,133	
	Q_1	0,262	0,282	0,300	0,316	0,329	0,344	0,354	0,365	0,376	0,386	0,394	
	Q_2	0,190	0,200	0,210	0,218	0,227	0,234	0,240	0,245	0,250	0,254	0,258	
	Q_1	0,274	0,259	0,245	0,233	0,222	0,211	0,203	0,195	0,187	0,180	0,174	
	Q_2	0,262	0,248	0,232	0,217	0,206	0,196	0,186	0,177	0,170	0,163	0,158	
	Q_1	0,274	0,285	0,297	0,309	0,318	0,326	0,334	0,341	0,347	0,353	0,358	
	Q_2	0,190	0,182	0,174	0,165	0,158	0,152	0,146	0,141	0,136	0,131	0,126	
	Q_1	0,262	0,248	0,232	0,217	0,206	0,196	0,186	0,177	0,170	0,163	0,158	
	Q_2	0,250	0,266	0,279	0,291	0,302	0,312	0,320	0,327	0,333	0,339	0,345	
	Q_1	0,250	0,234	0,221	0,209	0,198	0,188	0,180	0,173	0,167	0,161	0,155	
	Q_2	0,250	0,234	0,221	0,209	0,198	0,188	0,180	0,173	0,167	0,161	0,155	

Približno opterećenje
ostonačke grede

$q = \frac{Q}{l}$

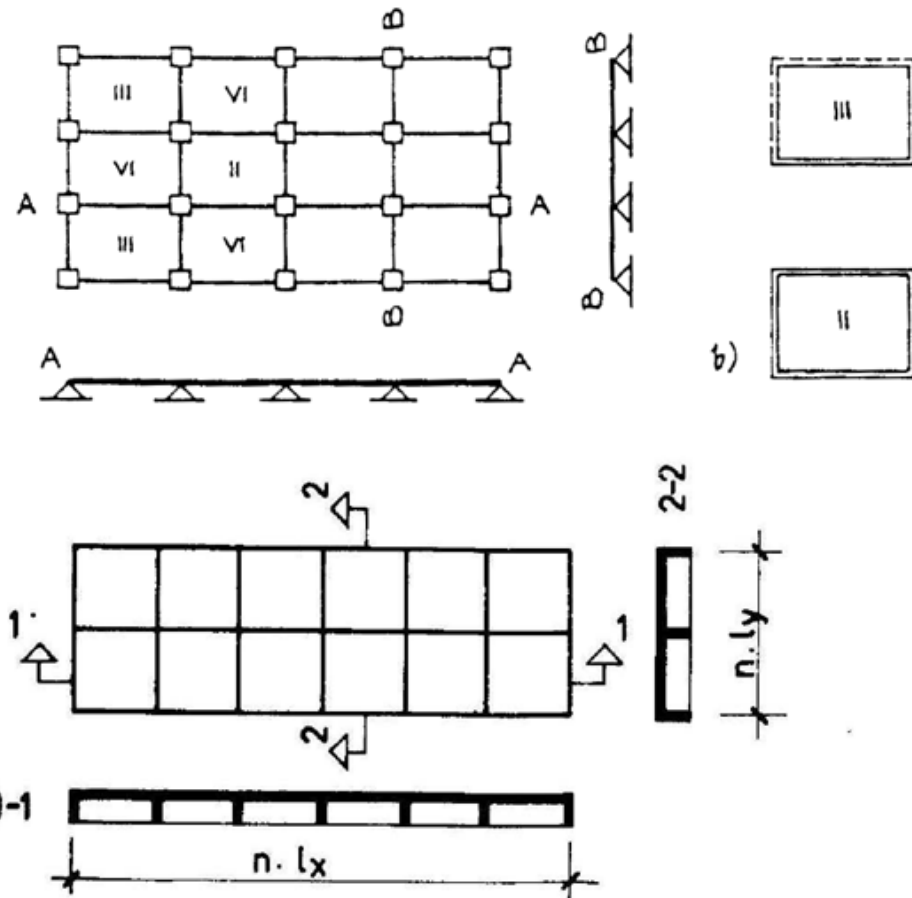
Približno opterećenje
oslonjačke grede



$$q = \frac{Q}{l}$$

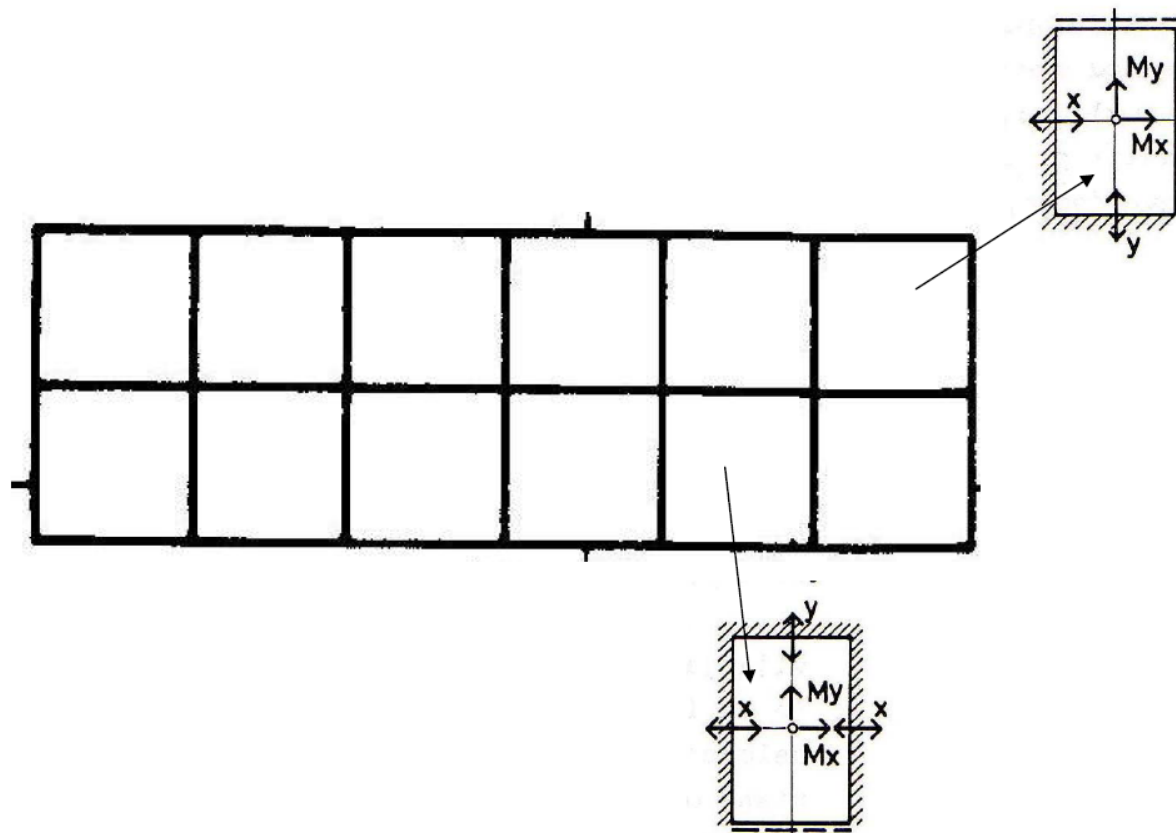
2.2. Krstasto armirane ploče

- Kontinualne krstasto armirane ploče se sastoje od dve ili više susednih krstastih ploča



2.2. Krstasto armirane ploče

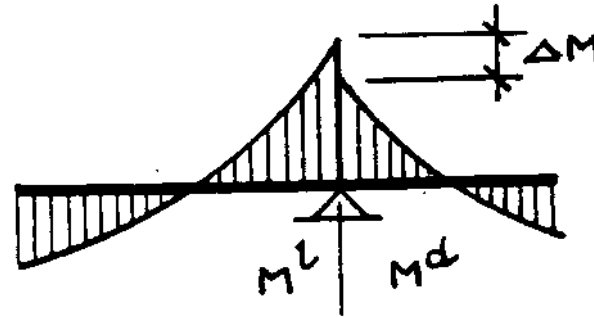
- Kada su ploče opterećenje jednako raspodeljenim opterećenjem približno jednakog intenziteta mogu se tretirati kao samostalne krstasto armirane ploče koje su uklještene na osloncima na kojima postoji kontinuitet, a slobodno oslonjene na ivicama ploče gde ne postoji kontinuitet



2.2. Krstasto armirane ploče

- U slučaju kada dve susedne ploče imaju različite granične uslove oslanjanja, za dimenzionisanje ploča nad osloncem se usvaja srednja vrednost momenta

$$M_{osl} = \frac{M^l + M^d}{2}$$



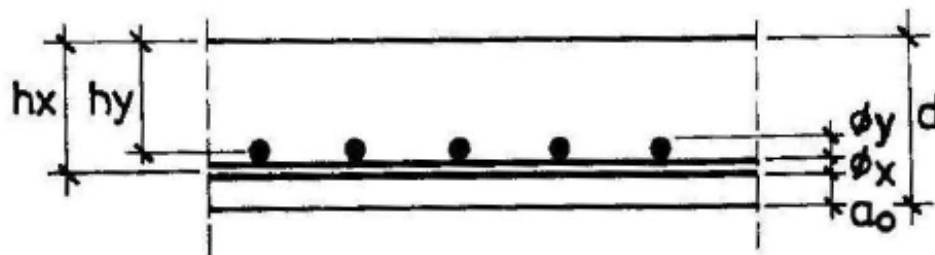
- Ako je povremeno opterećenje p veliko (veće od stalnog opterećenja) u pločama treba sračunati ekstremne vrednosti statičkih uticaja prema najnepovoljnijim rasporedima povremenog opterećenja

2.2. Krstasto armirane ploče

- Dimenzionisanje krstastih armiranih ploča se vrši kao za pravougaoni armirano betonski presek širine $b=100$ cm i visine d_p
- Kod krstasto armiranih ploča glavna armatura je u oba pravca
- Statičke visine u jednom i drugom pravcu su različite:

$$h_x \neq h_y$$

- Armatura koja prihvata veći moment savijanja postavlja se bliže zategnutoj ivici ploče i ima veću statičku visinu

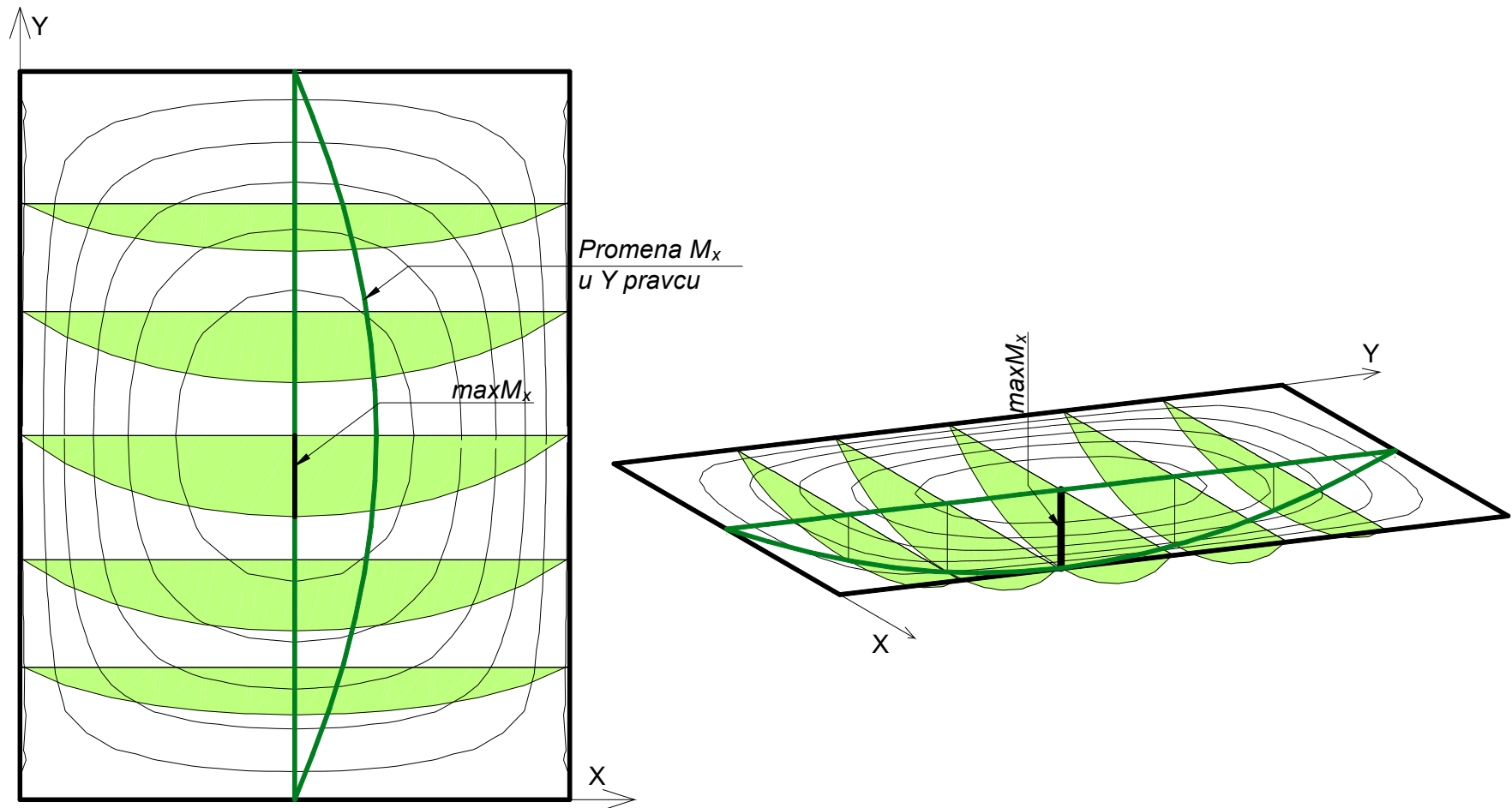


$$M_x > M_y$$

$$h_x = d - a_o - \frac{\phi_x}{2}$$

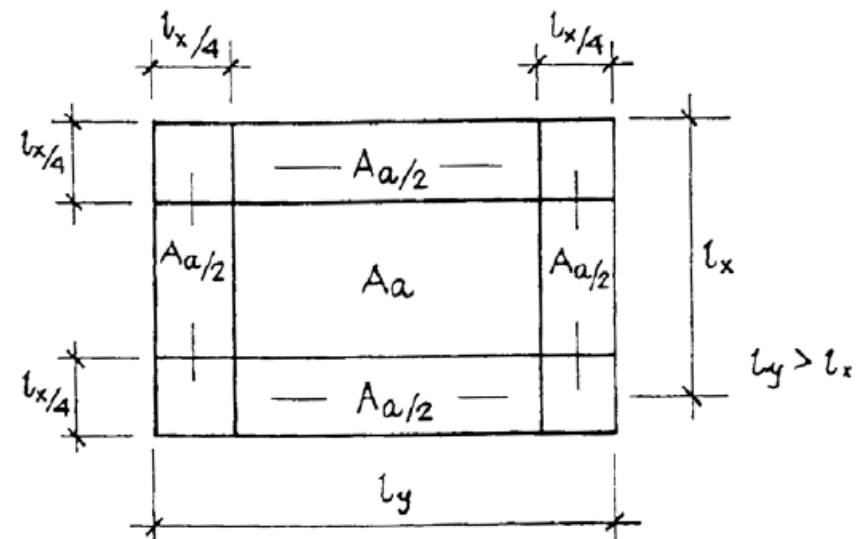
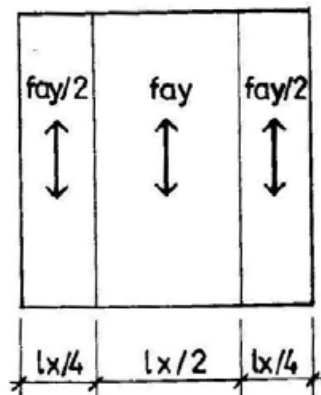
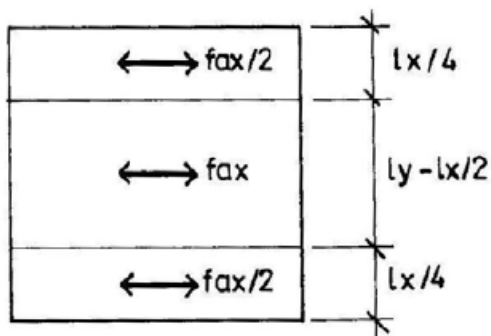
$$h_y = d - a_o - \phi_x - \frac{\phi_y}{2}$$

Promena momenata M_x u upravnom (Y) pravcu



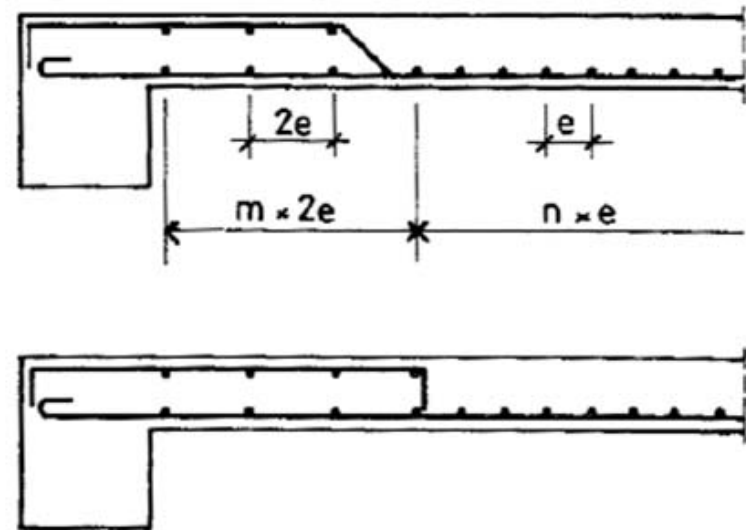
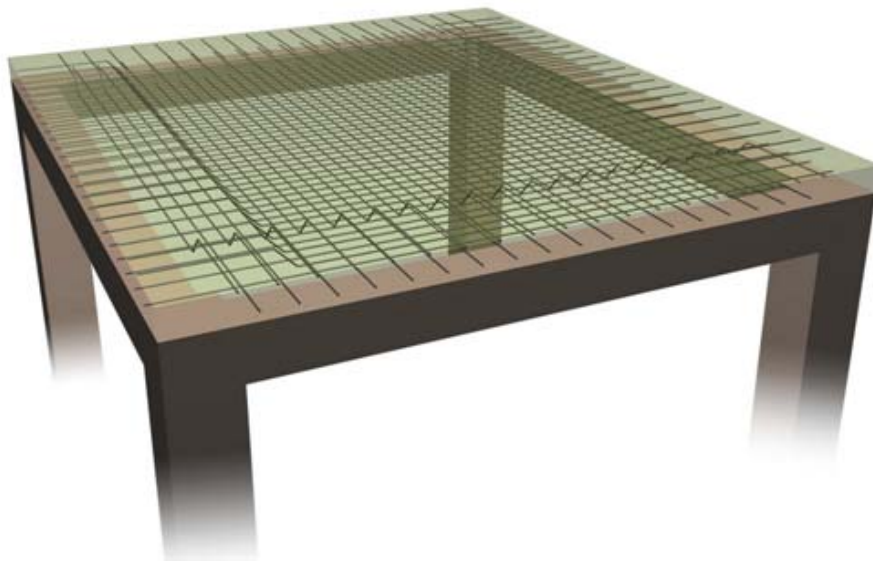
2.2. Krstasto armirane ploče

- Armatura se određuje na osnovu maksimalnih statičkih uticaja u preseku u polju i nad osloncem
- Ivične zone širine $l_x / 4$ u kojima su momenti znatno manji od onih za koje je izvršeno dimenzionisanje armature, armiraju se dvostruko manjom količinom od središnjih polja

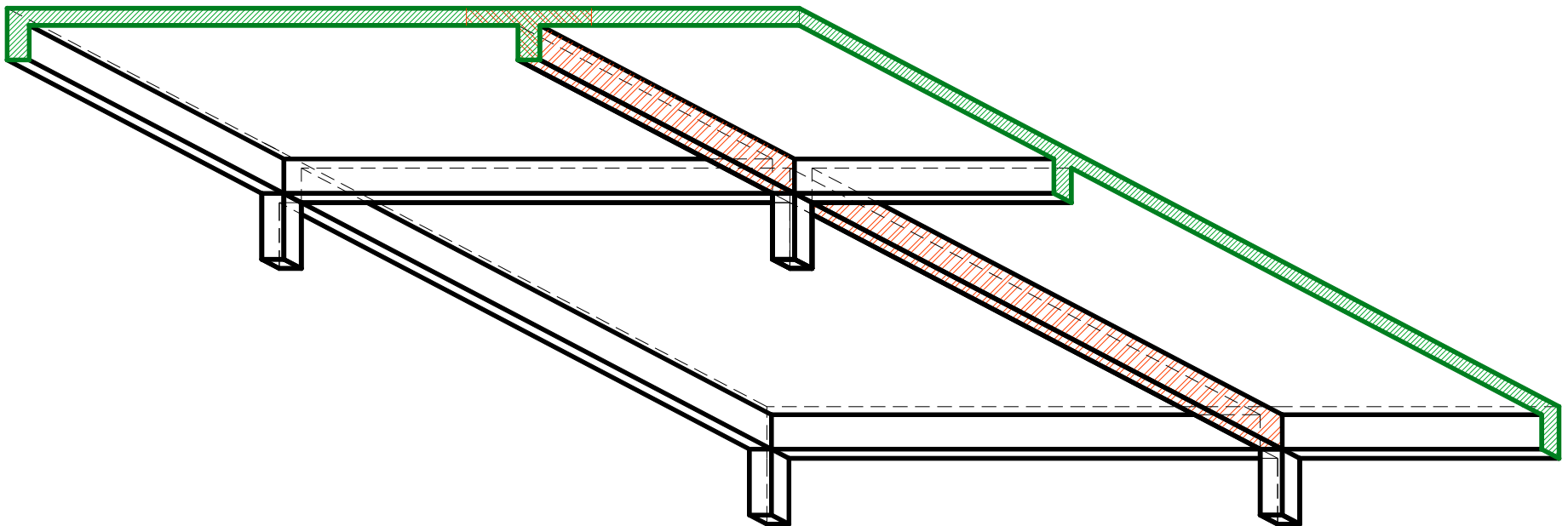


2.2. Krstasto armirane ploče

- Oblik i način armiranja krstasto armiranih ploča sličan je kao kod ploča u jednom pravcu
- Povoljnije je da je armatura u svim poljima na jednakom razmaku (obično oko 15cm), ali da se u različitim poljima koriste šipke različitih prečnika
- Minimalni procenti armiranja i maksimalno rastojanje šipki je isto



GREDE – PODVLAKE KRSTASTO ARMIRANIH PLOČA I PLOČA U JEDNOM PRAVCU

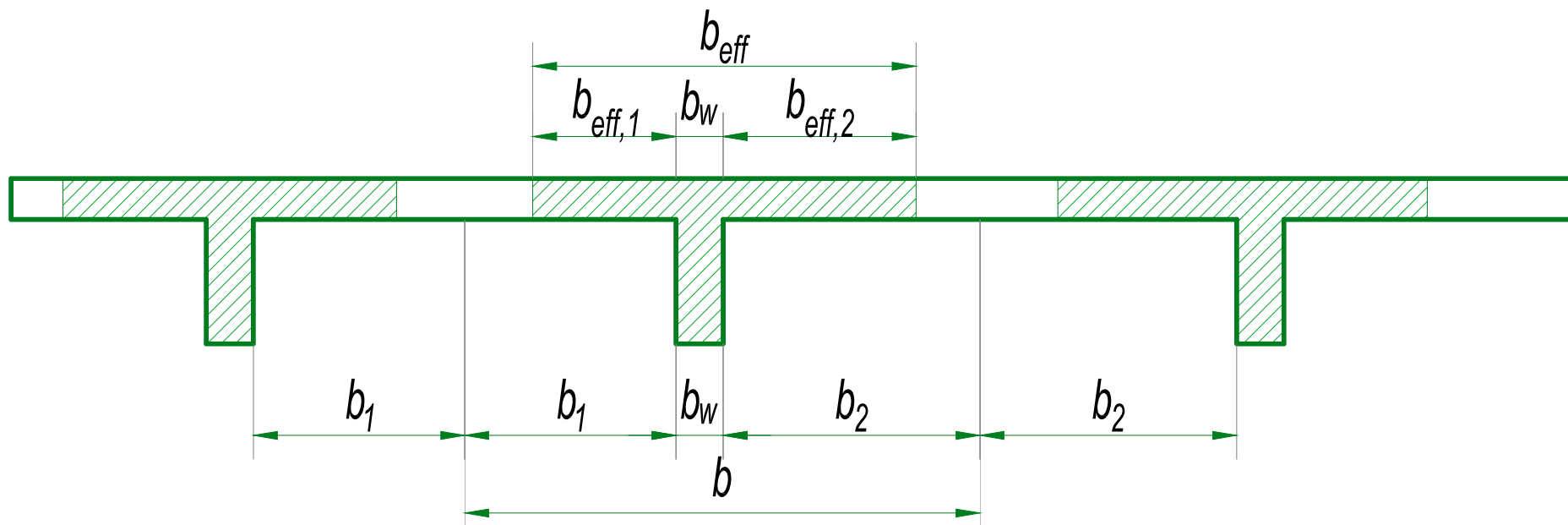


Visine grede h (ukupna visina sa pločom):

$L/10 - L/8$ za slobodno oslonjene grede

$L/12 - L/10$ za kontinualne grede

Efektivna širina flanše

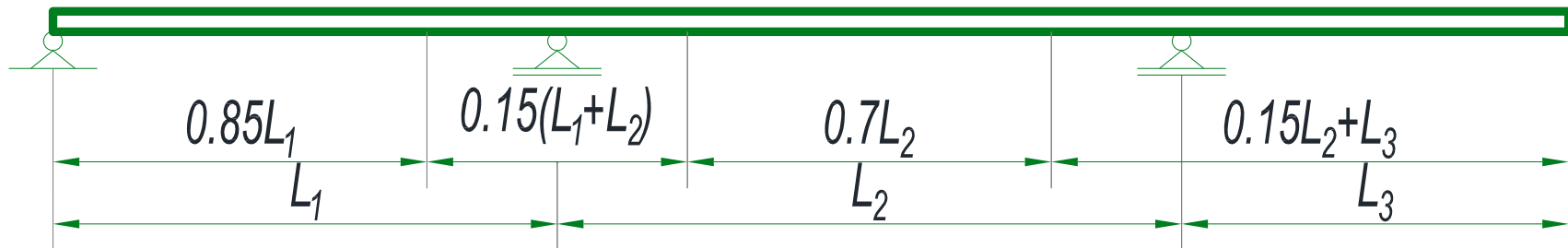


Efektivna širina b_{eff} se računa kao:

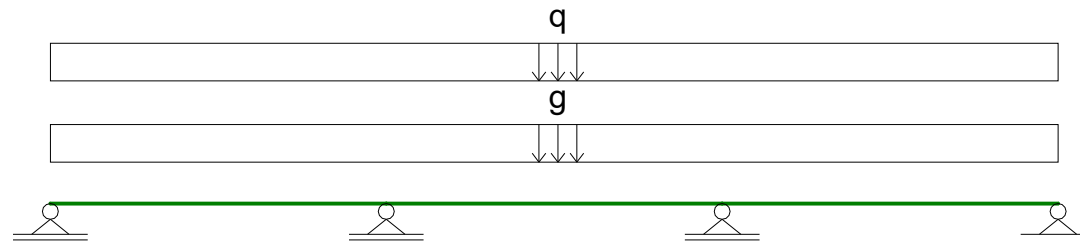
$$b_{eff} = \sum b_{eff,i} + b_w \leq b, \text{ gde je}$$

$$b_{eff,i} = 0.2b_i + 0.1L_0 \leq 0.2L_0, \text{ i } b_{eff,i} \leq 0.2b_i$$

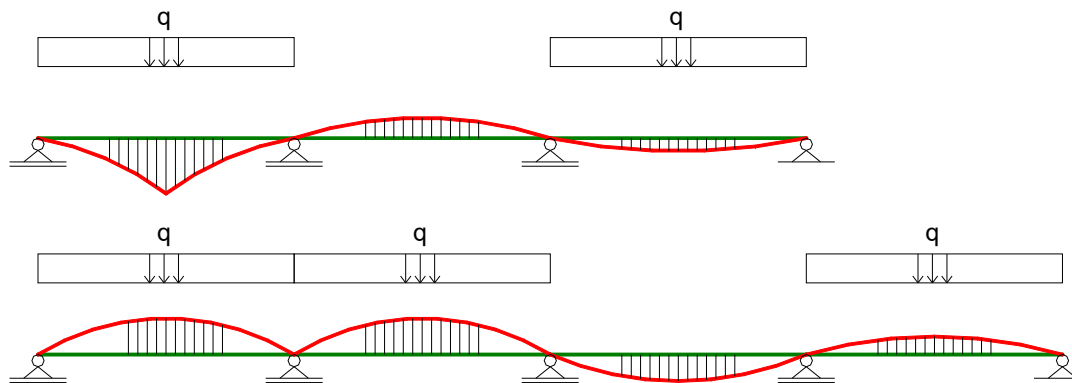
Razmak tačaka nultih momenta savijanja duž podvlake



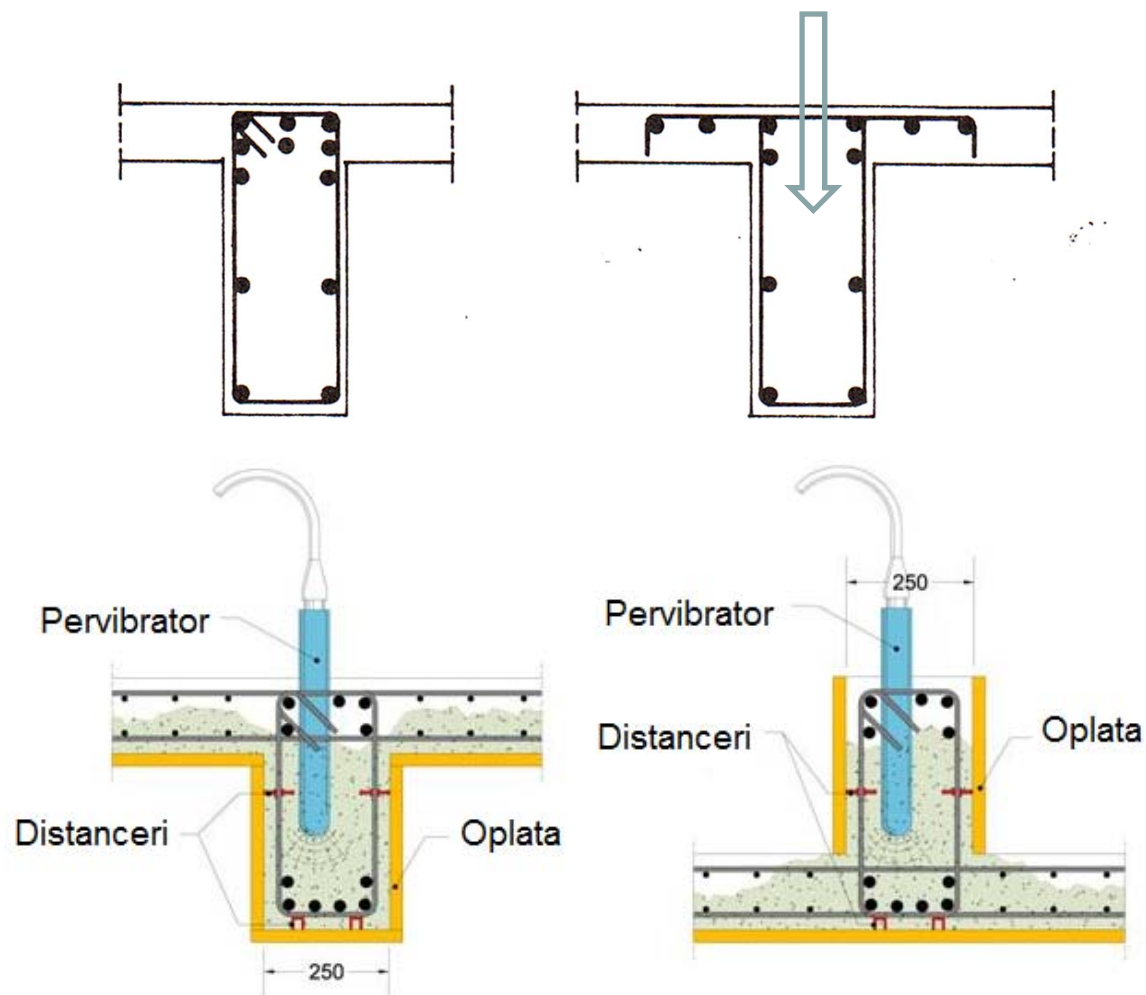
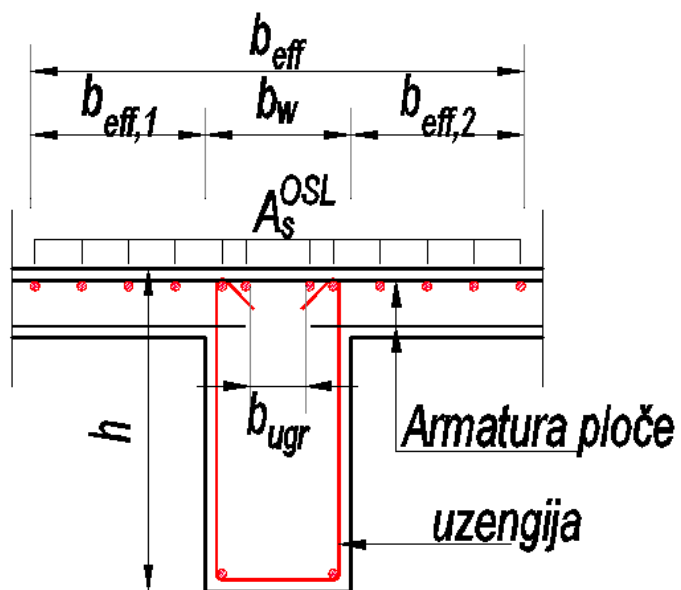
Za relativno malo povremeno opterećenje p u odnosu na stalno g statički uticaji se određuju za opterećenje raspodeljeno po svim rasponima



Za slučaj da je $q \gg g$ treba određivati ekstremne uticaje



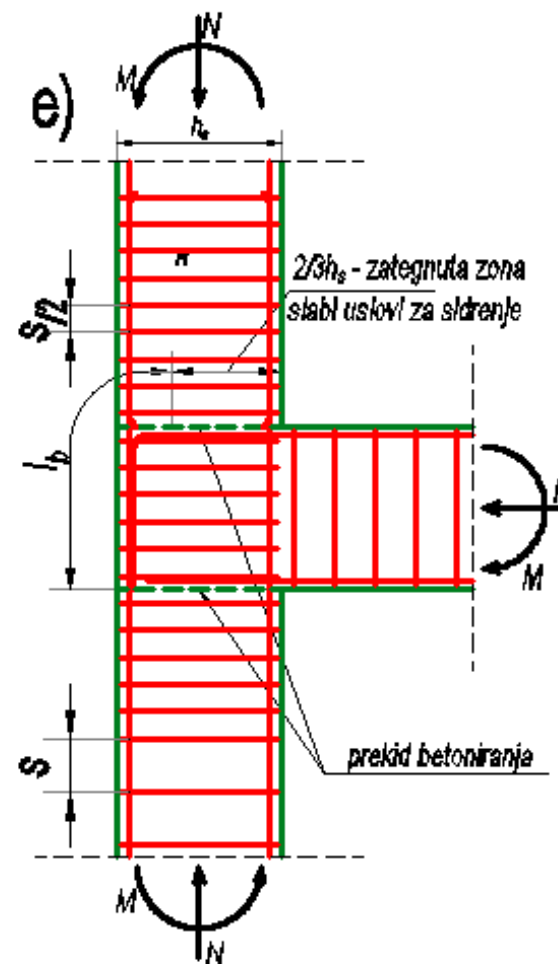
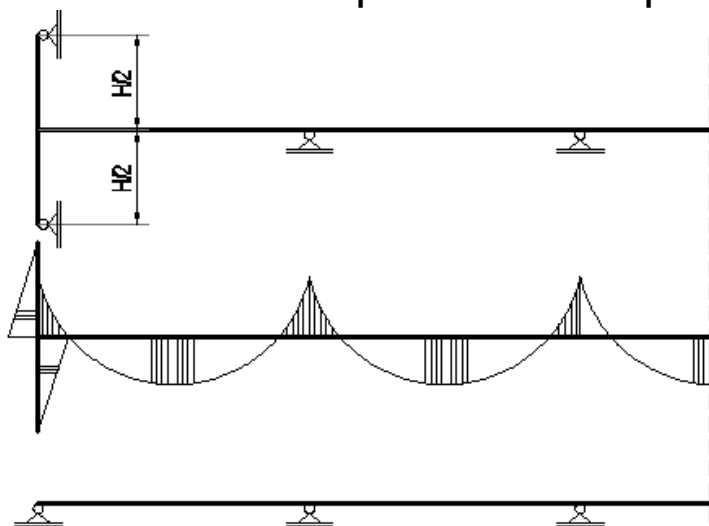
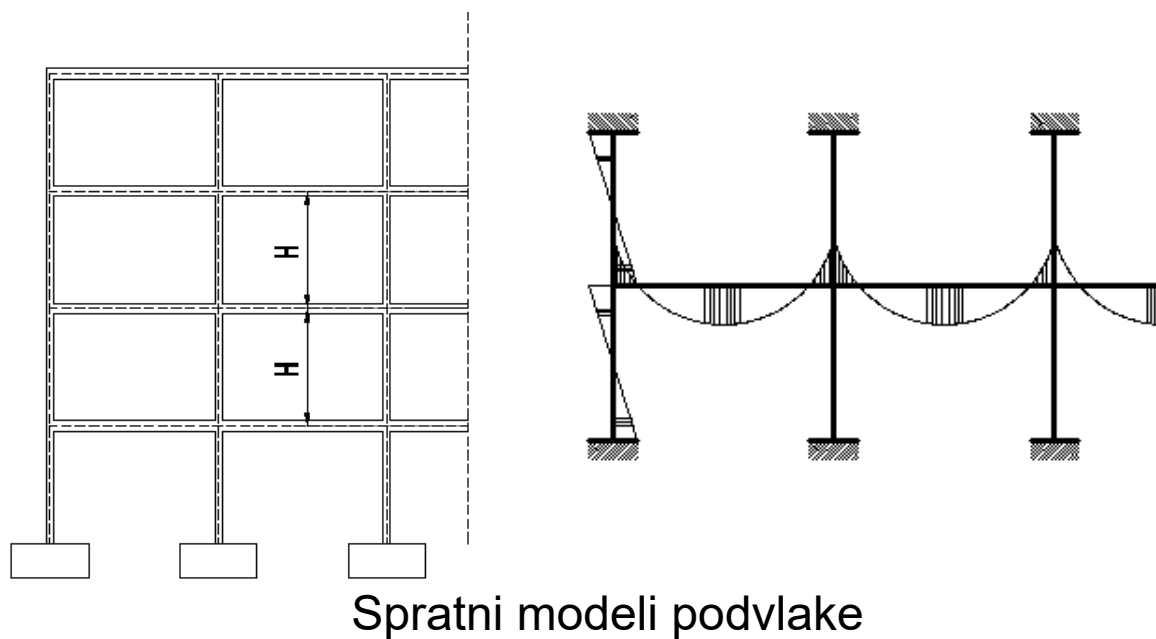
ARMIRANJE PODVLAKE U GORNJOJ ZONI



Raspoređivanje negativne armature na širini b_{eff}

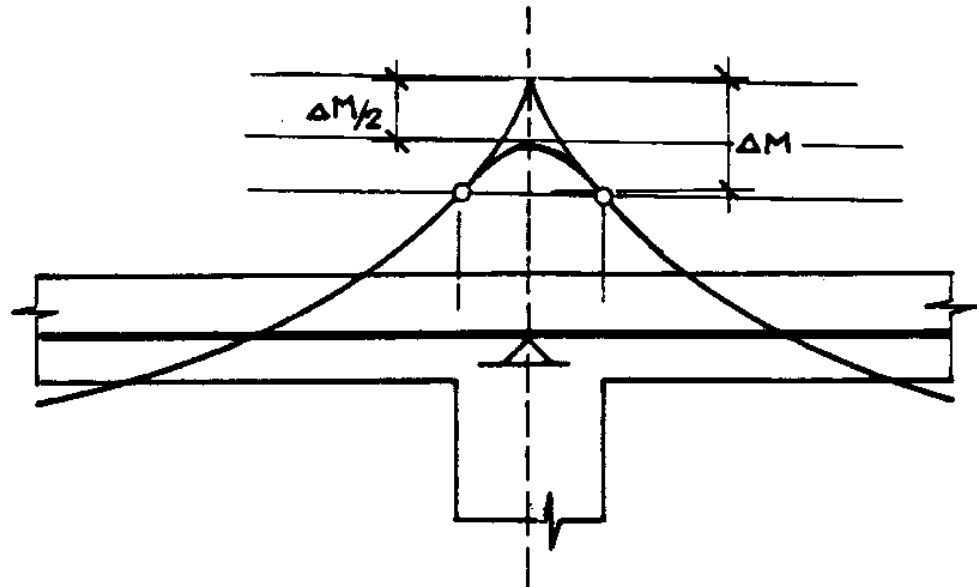
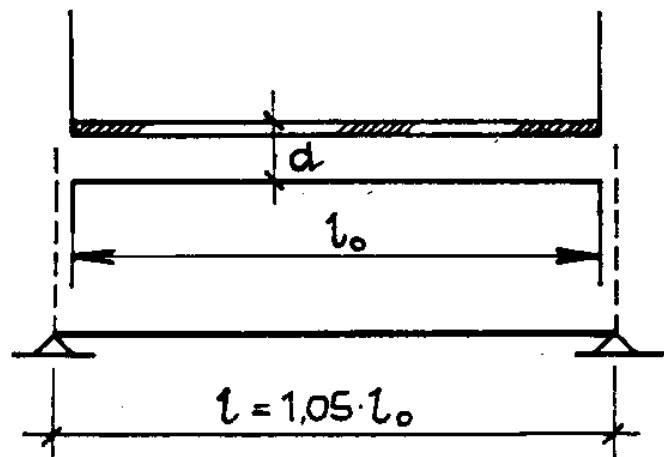
- bolja ugradnja betona
- bolje prijanjanje armature i betona

U ramovskim konstrukcijama treba uzeti efekat krute veze sa ivičnim stubom



Sidrenje armature grede na vezi sa ivičnim stubom

- Grede se oslanjaju na stubove i zidove
- U statičkom sistemu oslonci se usvajaju u osovinama stubova
- Kada su oslonci velike širine, u statičkom proračunu za raspon grede usvaja se fiktivna dužina $l = 1.05l_0$, l_0 -širina svetlog otvora
- Dimenzionisanje oslonačkih preseka kod greda sa širokim osloncima može se vršiti prema momentu umanjenom za veličinu $\Delta M/2$

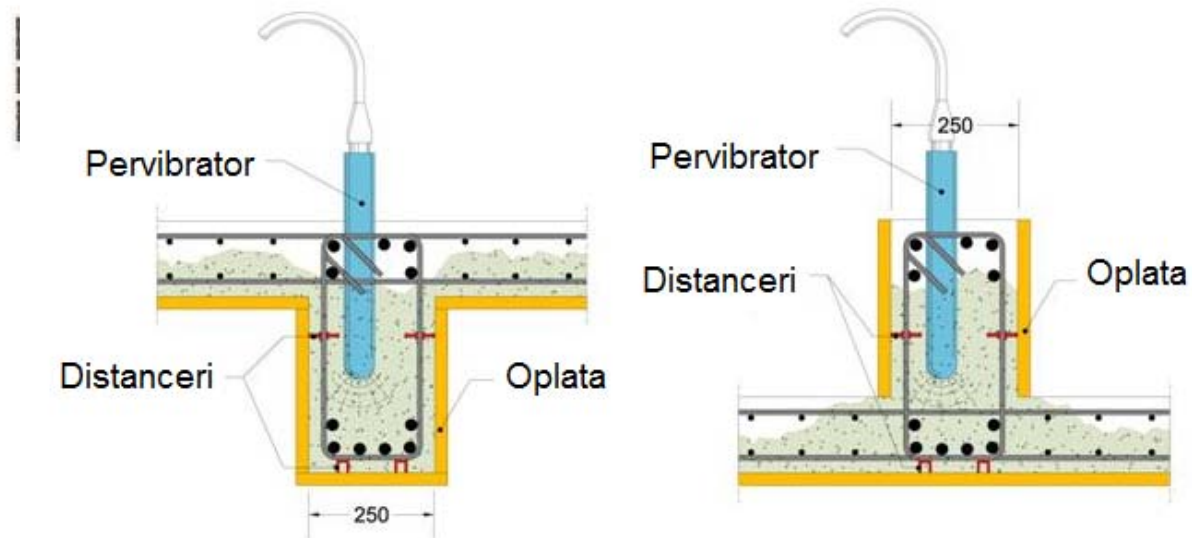


2.3. Podvlake

- Minimalni procenti armiranja u odnosu na površinu betonskog preseka su:

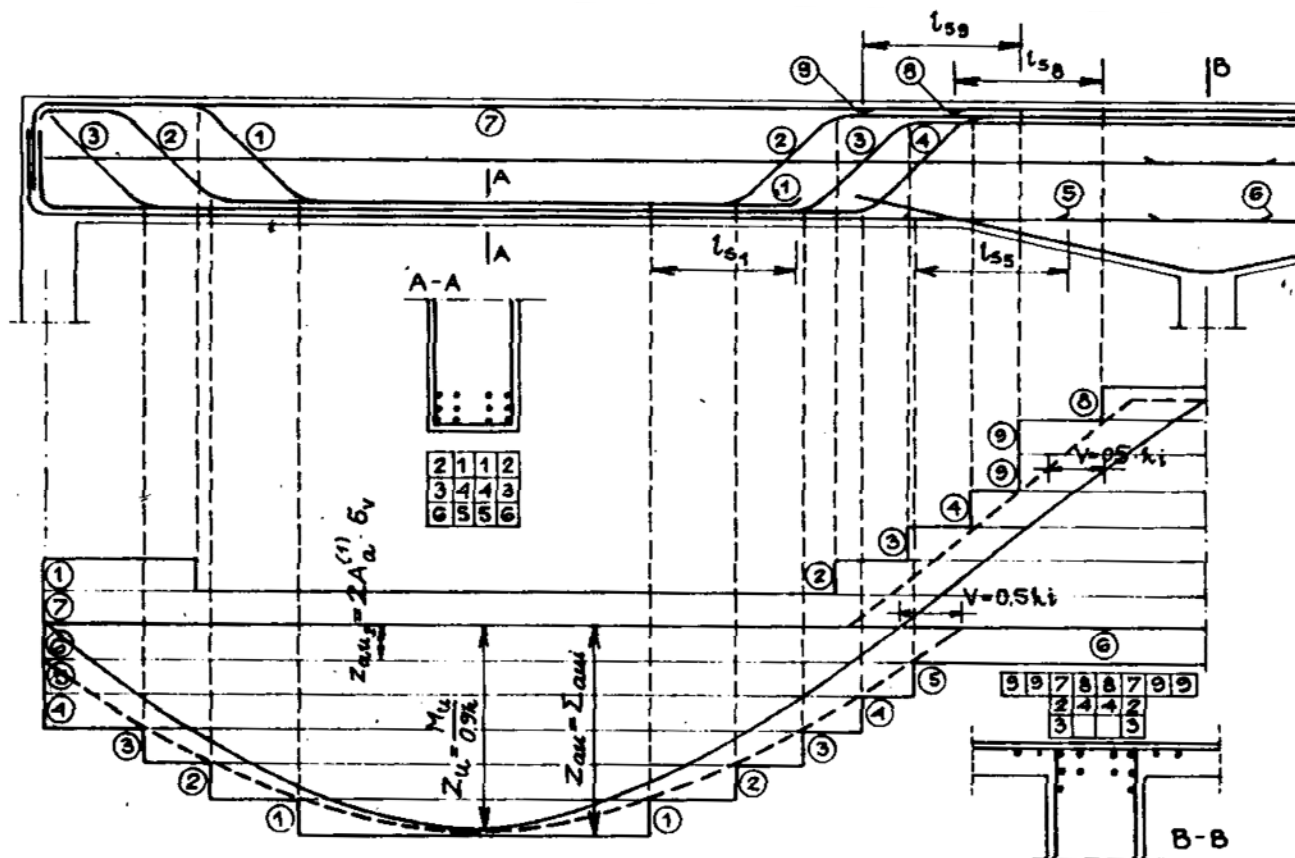
$$A_{s1,min} = \max \begin{cases} 0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \\ 0.0013 \cdot b_t \cdot d \end{cases}$$

- Da bi se omogućilo pravilno ugrađivanje betona potrebno je ostaviti rastojanje između dve šipke u gornjoj zoni veće od 3.5cm, ili jedan deo armature postaviti u ploču izvan preseka grede na širini do $1.5d_p$, odnosno na širitu b_{eff}



2.3. Podvlake

- Dimenzionisanje armature se vrši u presecima sa najvećim momentima savijanja a raspored armature po dužini grede se najlakše određuje grafičkim putem pomoću **linije zatežućih sila**



Sila zatezanja:

$$F_{s1} = M_{Ed} / z$$

Krak sila:

$$z \approx 0,9 \cdot d$$