



Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet
www.grf.bg.ac.rs

Studijski program: **GRAĐEVINARSTVO**

Modul: **KONSTRUKCIJE**

Godina/Semestar: **3 godina / 5 semestar**

Naziv predmeta (šifra): **TEORIJA BETONSKIH KONSTRUKCIJA 1
(B2K3B1)**

Nastavnik: **Prof.dr Snežana Marinković**

Naslov predavanja: **SMICANJE**

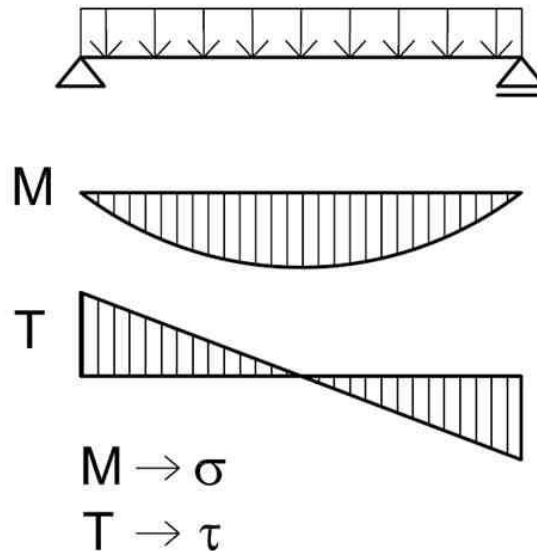
Datum : 03.11.2021.

Beograd, 2021.

Sva autorska prava autora prezentacije i/ili video snimaka su zaštićena. Snimak ili prezentacija se mogu koristiti samo za nastavu na daljinu studenta Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu u školskoj 2021/2022 i ne mogu se koristiti za druge svrhe bez pismene saglasnosti autora materijala.

ULS – smicanje

Savijani elementi realnih AB konstrukcija (grede, ploče..), pored momenata savijanja uvek imaju i transverzalne sile, makar samo od uticaja sopstvene težine. Transverzalne sile izazivaju smičuće napone, tako da su AB elementi uvek izloženi kombinovanom dejstvu momenata savijanja i transverzalnih sila, odnosno normalnih i smičućih napona.



ULS – smicanje

ELEMENTI KOJI NEMAJU ARMATURU ZA SMICANJE

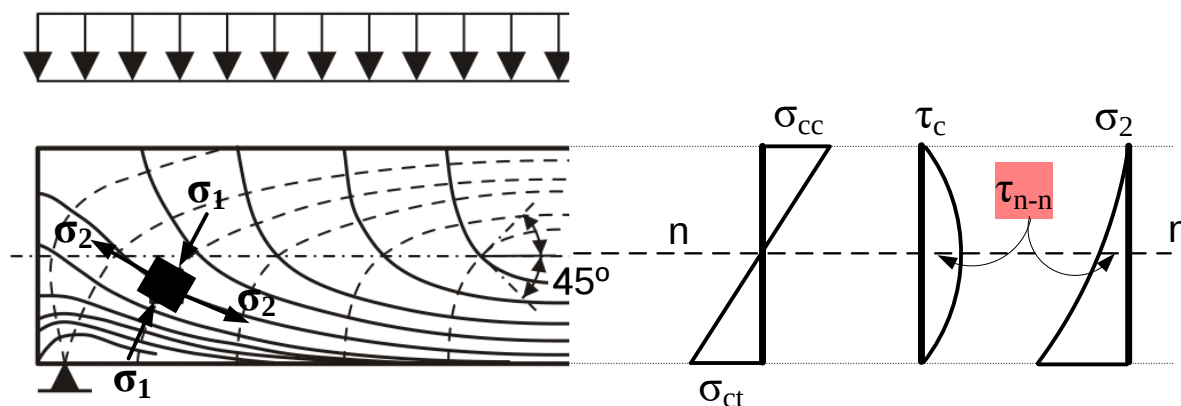
Mehanizam prenošenja smičućih napona zavisi najviše od toga da li su u elementu razvijene prsline od savijanja ili ne. Posmatraćemo dva slučaja:

AB element bez prsline od savijanja u kritičnoj zoni (zona u kojoj su transverzalne sile najveće) i

AB element koji ima razvijene prsline od savijanja u posmatranoj zoni.

ULS – smicanje

Trajektorije glavnih napona pritiska i zatezanja - homogen materijal, **bez prslina**:



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{cc}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_{cc}^2}{4} + \tau_c^2}$$

U neutralnoj osi nosača $\sigma_{cc}=0$:

$$\sigma_{1,2} = \pm \tau_c$$

Glavni naponi zatezanja!

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \pm \frac{2\tau_c}{\sigma_{cc}} \quad \alpha_{1,2} = \pm 45^\circ$$

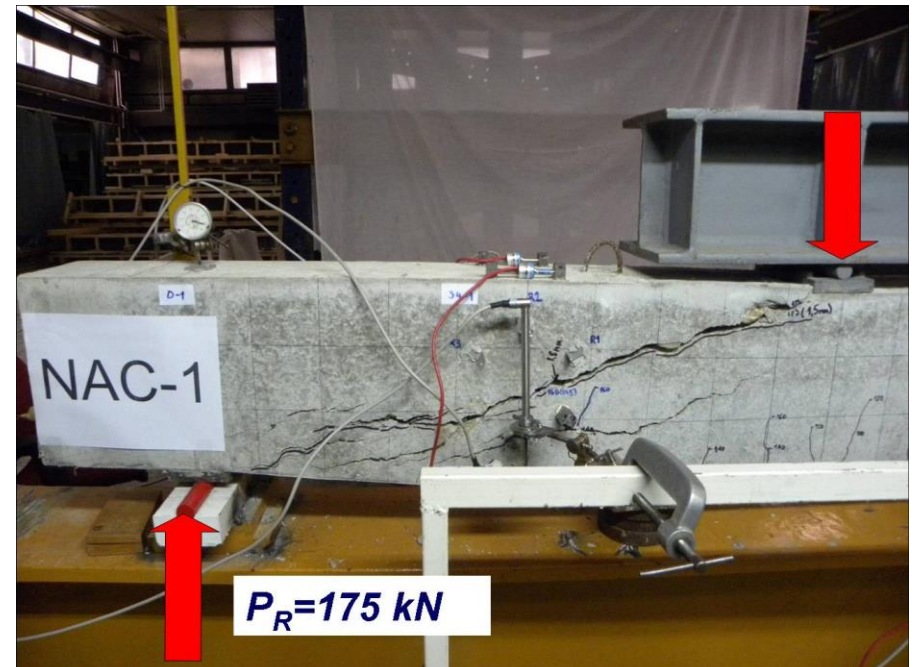
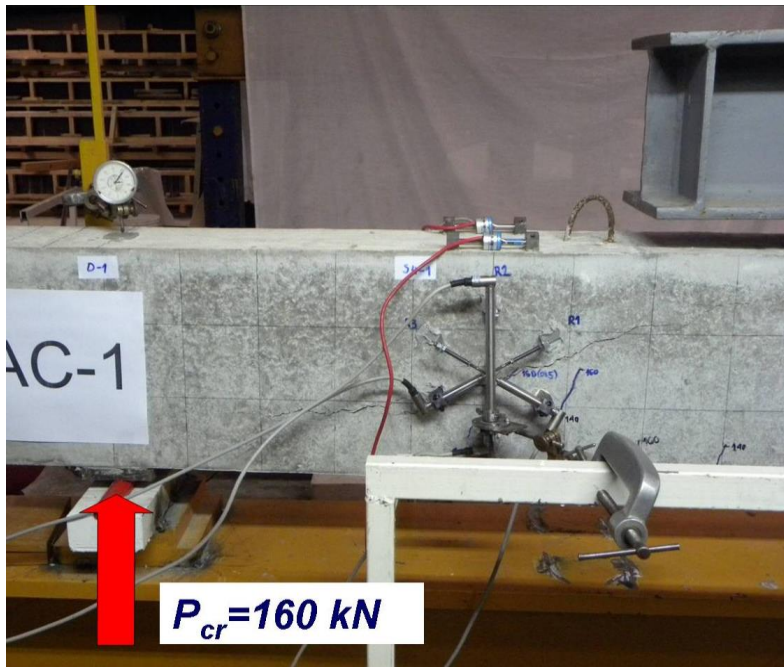
ULS – smicanje

Ukoliko u AB elementu nema prslina od savijanja, smicanje se prenosi naponima pritiska i zatezanja u betonu. Kada maksimalni glavni napon zatezanja, usled dejstva momenta i transverzalne sile, prekorači čvrstoću betona na zatezanje javlja se kosa-dijagonalna prslina koja praktično predstavlja lom, jer nema armature koja može da prihvati ovo zatezanje. Ovo je *smičući lom zatezanjem (shear-tension)*.

Javlja se u prethodno napregnutim elementima, elementima sa velikom aksijalnom silom pritiska (stubovi), u blizini oslonaca visokih greda ili oko tačaka infleksije kontinualnih greda.

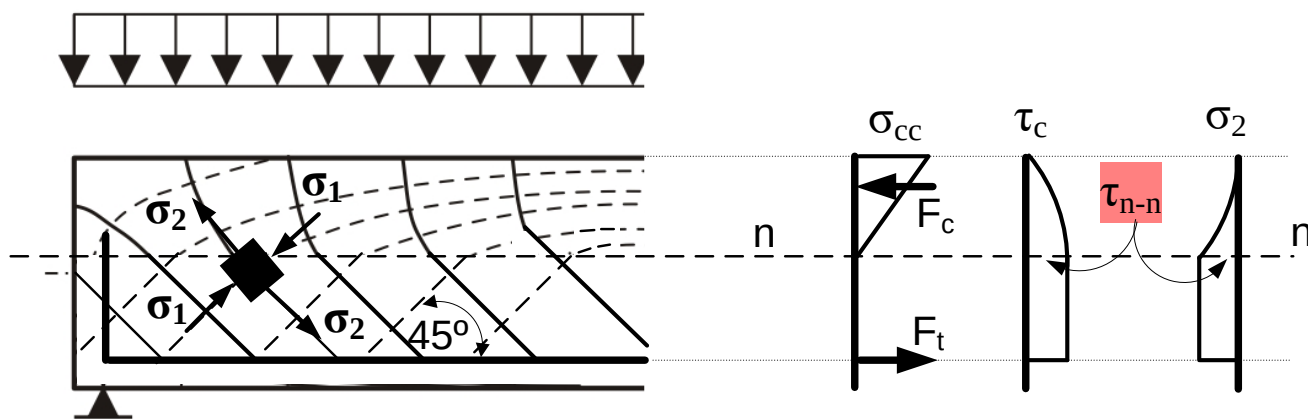
ULS – smicanje

smičući lom zatezanjem



ULS – smicanje

U najvećem broju slučajeva smicanje se prenosi **u prisustvu prslina** od savijanja. *Pod pretpostavkom da se kroz prsline ne može preneti normalni napon zatezanja, ali može smičući napon*, trajektorije glavnih napona pritiska i zatezanja:



$$\tau = \frac{VS_i}{bJ_i}$$

u težištu
(neutralna osa):

$$\frac{J_i}{S_i} = z$$

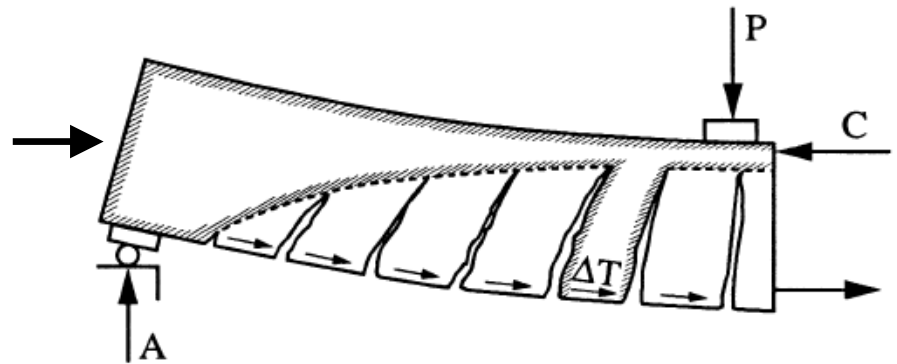


$$\tau_{n-n} = \frac{V}{bz}$$

ULS – smicanje

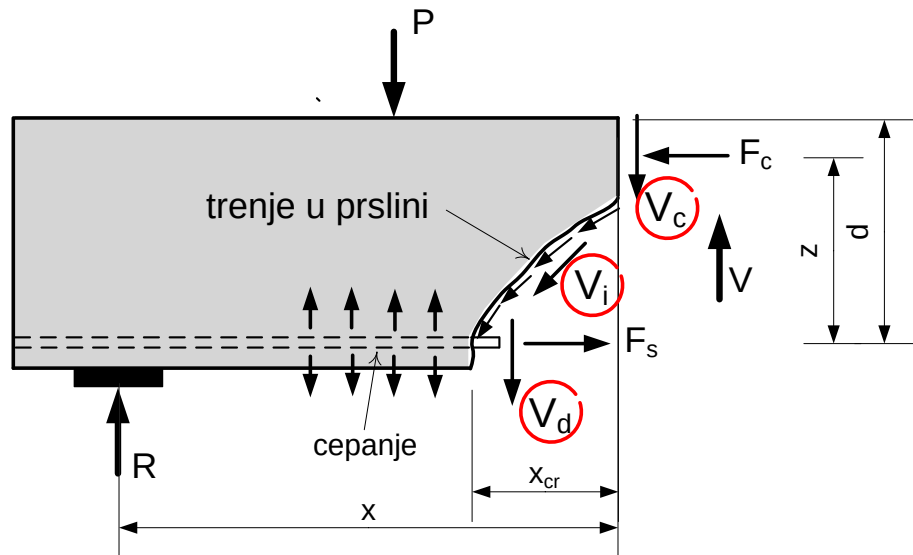
Kosa prslina, odnosno lom, nastaje kad glavni napon zatezanja, brojno jednak smičućem naponu $\tau_{n-n} = V/bz$, prekorači čvrstoću betona na zatezanje.

U suprotnom, ukoliko se kroz prsline uopšte ne prenosi smicanje, “**zub**” betona između prsline se ponaša kao konzola ukleštena u pritisnuti beton, opterećena silom prljanjanja između betona i zategnute armature. Nosivost na smicanje je određena nosivošću betonske konzole na savijanje.



ULS – smicanje

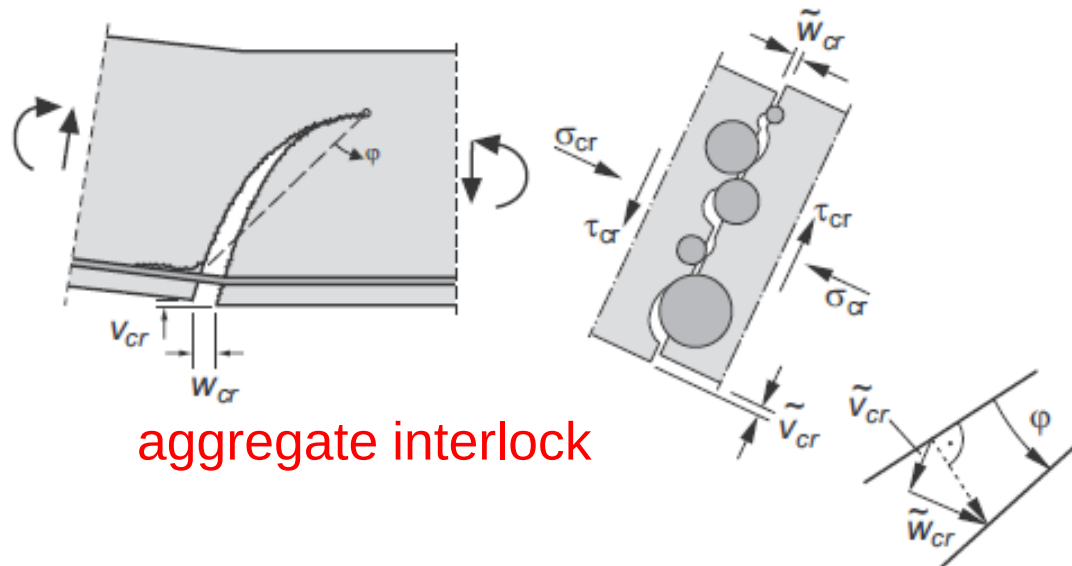
Ovo je *smičući lom savijanjem (shear-flexure)*, a stvarno ponašanje isprskalog AB elementa je između ova dva ekstremna modela:



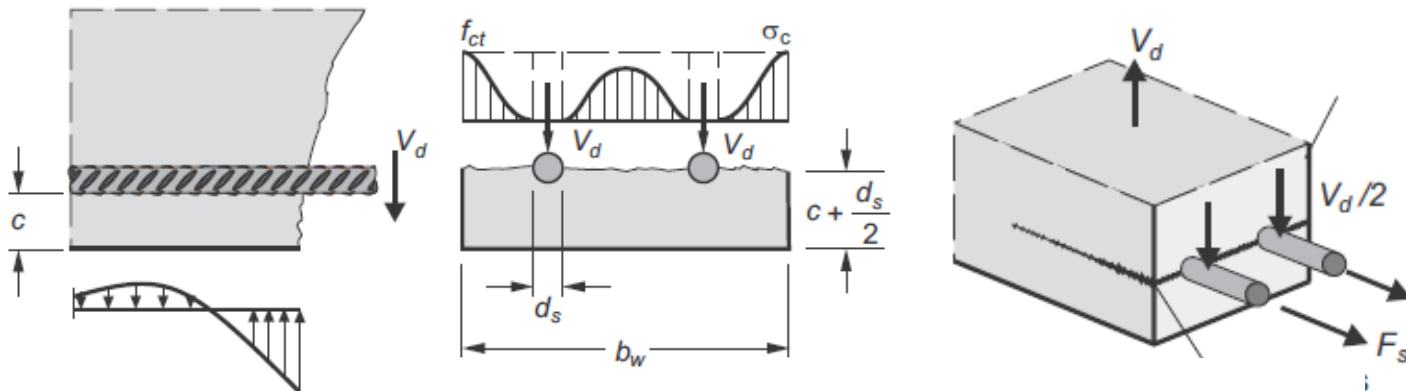
Transverzalna sila se prenosi:

- smičućim naponima u pritisnutom betonu V_c ;
- trenjem kroz prslinu, zahvaljujući *aggregate interlock*-u, V_i ;
- dejstvom moždanika zategnute armature (*dowel effect*), V_d .

ULS – smicanje



aggregate interlock



dowel effect

ULS – smicanje

Većina standarda, pa i EC2, za sračunavanje **nosivosti na smicanje savijanjem AB elementa bez armature za smicanje**, za ovu vrstu loma daju **empirijske izraze**. Danas postoje mehanički modeli koji tačnije opisuju ovu pojavu, među kojima se izdvajaju dva:

- **Modifikovana teorija polja pritisaka** (*Modified compression field theory – MCFT*), Vecchio&Collins, 1986. U pojednostavljenom obliku, koristi se u Kanadskim propisima i u MC2010.
- **Teorija kritične širine prslina** (*Critical shear crack width theory – CSCT*), Muttoni, 2003. U pojednostavljenom obliku, koristi se u Švajcarskim propisima, i za proračun probijanja ploča direktno oslonjenih na stubove u MC2010.

ULS – smicanje

U nekim slučajevima opterećenja, grednim mehanizmom se ne može dobro modelirati realno ponašanje AB elementa. To su slučajevi kada opterećenje deluje u blizini oslonca odnosno kada je smičući raspon

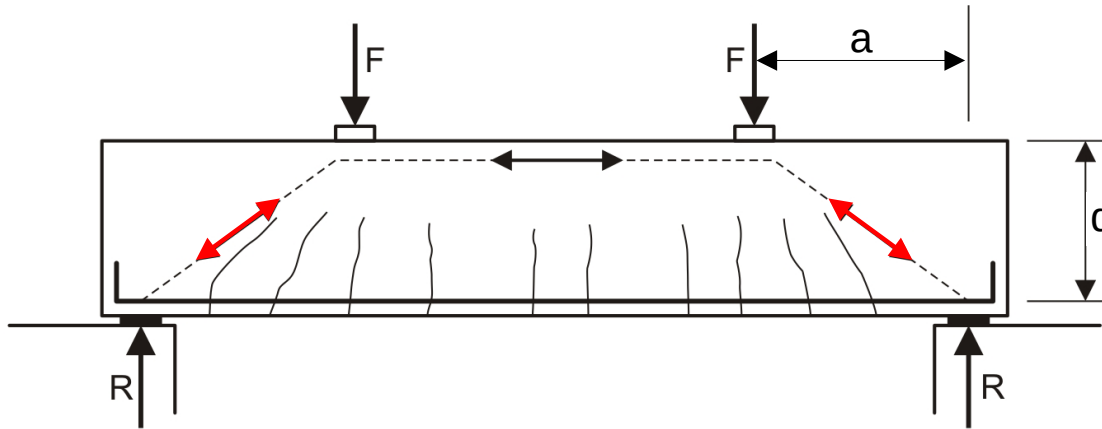
$$a_v = \frac{a}{d} \leq 2 \div 3$$



lučni mehanizam



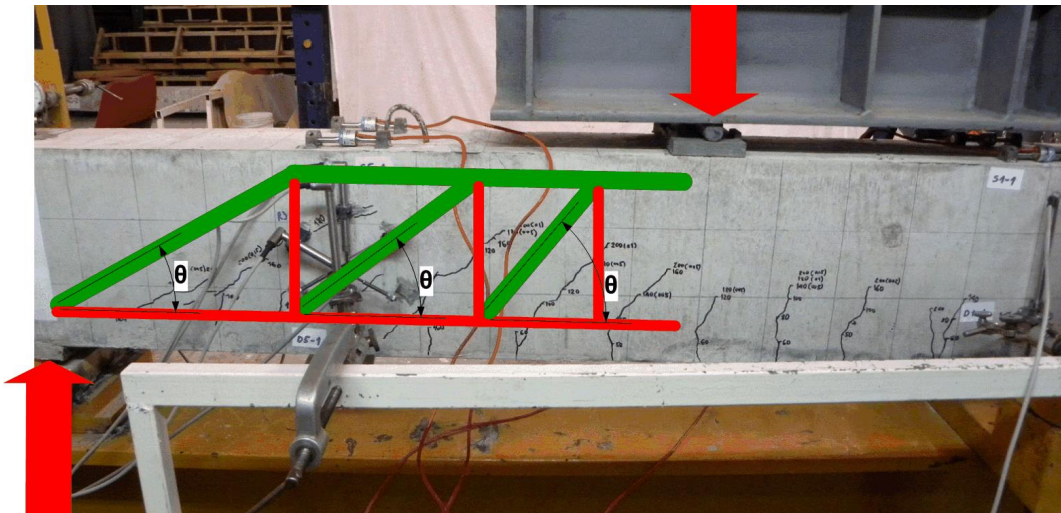
strut&tie modeli
empirijski izrazi



ULS – smicanje

ELEMENTI KOJI IMAJU ARMATURU ZA SMICANJE

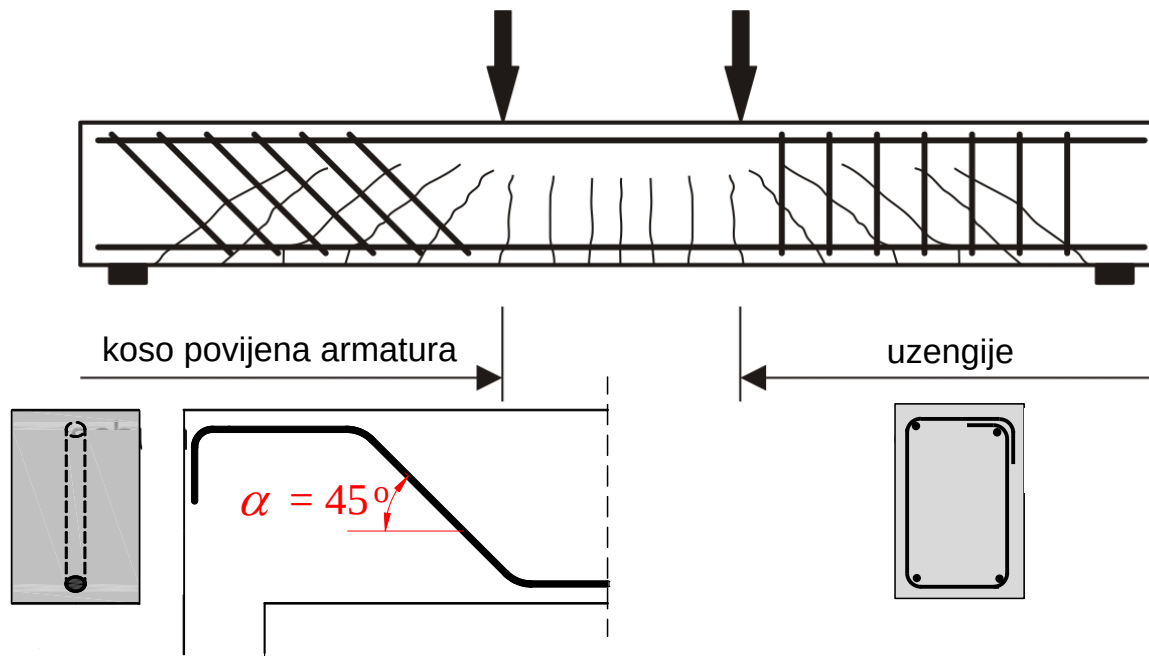
Ponašanje grednog nosača sa prslinama u fazi loma opisuje se *modelom rešetke*.



- pritisnuti pojas: beton
- zategnuti pojas:
podužna armatura
- pritisnute dijagonale: beton,
nagib θ
- zategnute vertikale ili dijagonale:
armatura za smicanje, nagib α

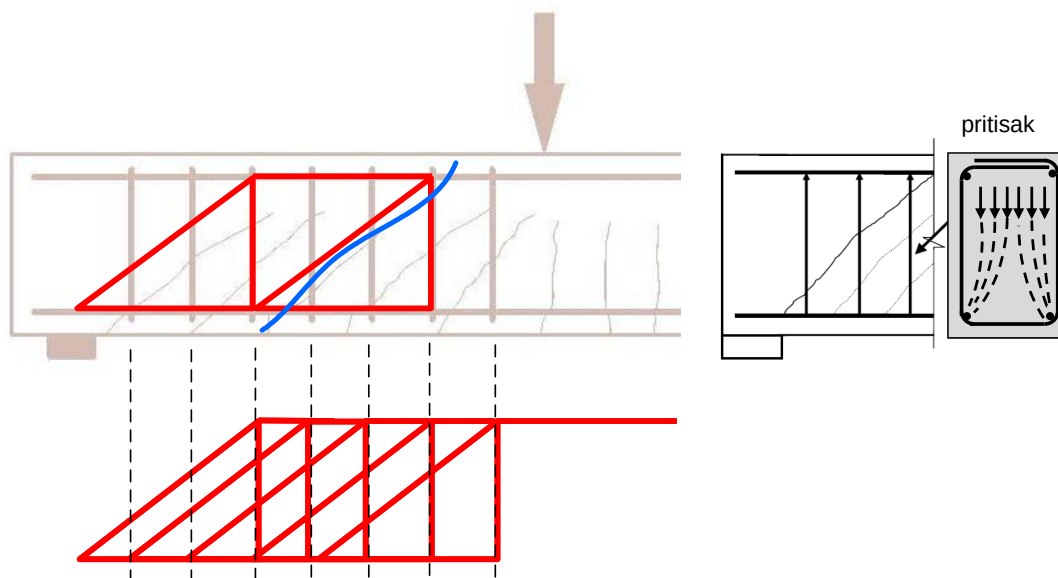
ULS – smicanje

Armatura za smicanje: vertikalne uzengije ili koso povijena armatura.



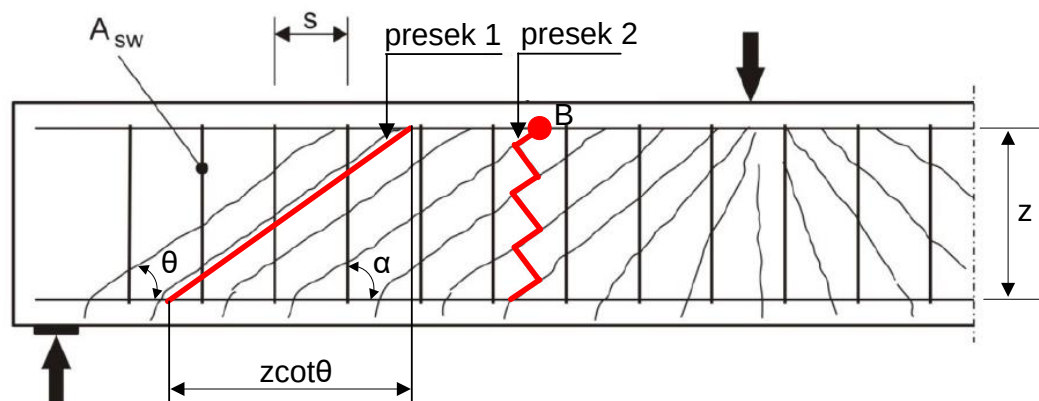
ULS – smicanje

U modelu rešetke, sve uzengije, odnosno sve betonske dijagonale, na dužini horizontalne projekcije preseka koji je paralelan pritisnutim dijagonalama, se mogu modelirati kao jedna vertikala, odnosno jedna dijagonala.



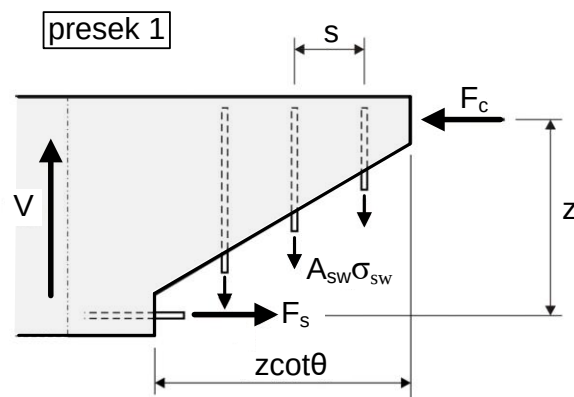
ULS – smicanje

Proračun sila u štapovima rešetke



uzengije

$\alpha=90^\circ$

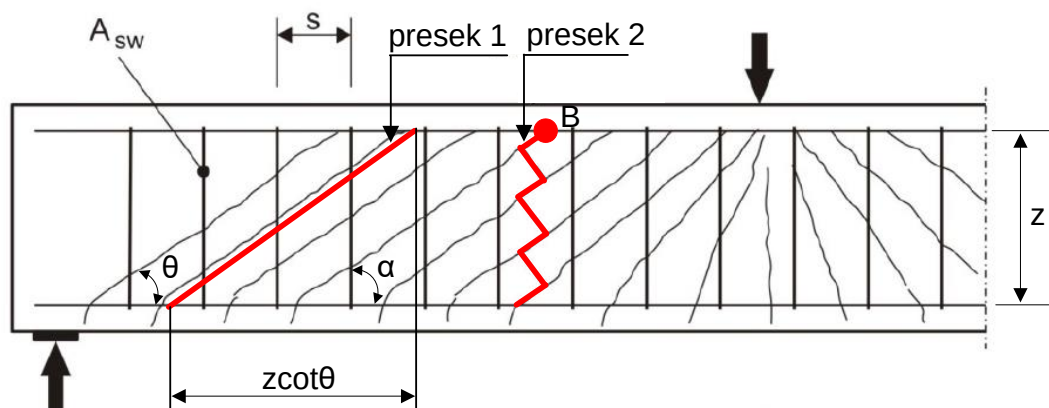


$$\sum V^{presek1} = 0$$

$$V = A_{sw} \sigma_{sw} z \cot \theta / s$$

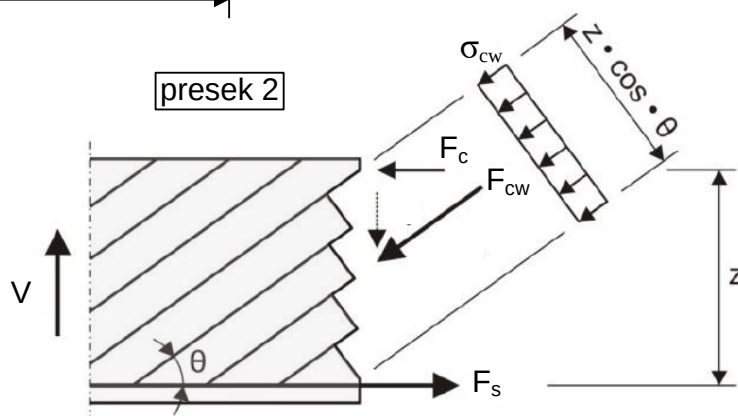
ULS – smicanje

Proračun sila u štapovima rešetke



uzengije

$$\alpha=90^\circ$$

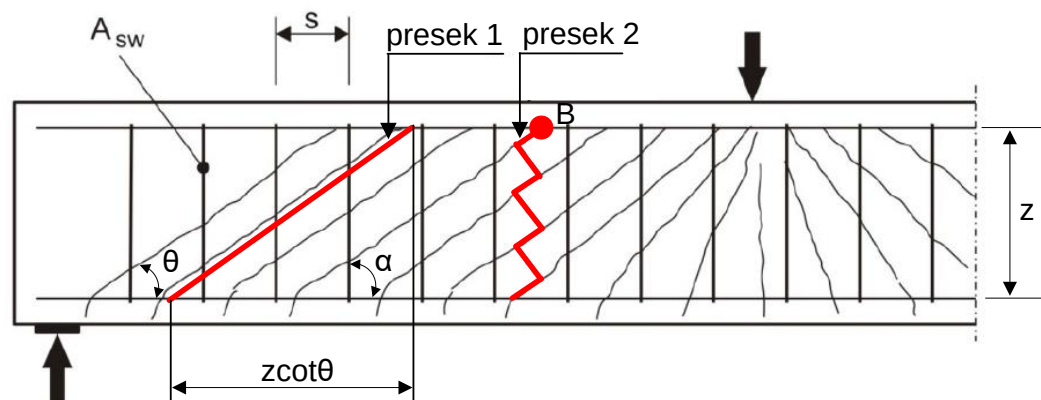


$$\sum V^{presek2} = 0$$

$$V = \sigma_{cw} b_w z \cos \theta \sin \theta$$

ULS – smicanje

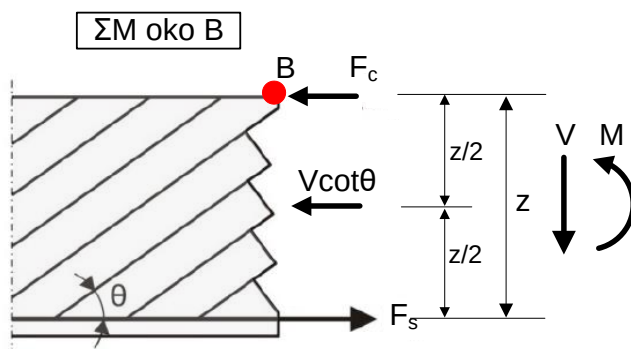
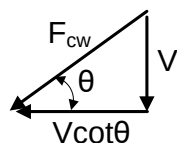
Proračun sila u štapovima rešetke



uzengije

$\alpha=90^\circ$

ΣN u preseku



$$\sum M^B = 0$$

$$F_s = \frac{M}{z} + \frac{1}{2} V \cot \theta$$

ULS – smicanje

$$\sigma_{sw} = f_{yd}$$



$$\sigma_{cw} = f_{cd2}$$

uzengije

$\alpha=90^\circ$

Nosivost pritisnute betonske dijagonale:

$$V_{Rd,cw} = f_{cd2} b_w z \cos \theta \sin \theta = f_{cd2} b_w z \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

Nosivost uzengija:

$$V_{Rd,sw} = A_{sw} f_{ywd} z \cot \theta / s$$

Nosivost podužne zategnute armature u svakom preseku mora zadovoljiti:

$$F_{s,Rd} \geq F_{s,Ed} = \frac{M_{Ed}}{z} + \frac{1}{2} V_{Ed} \cot \theta$$

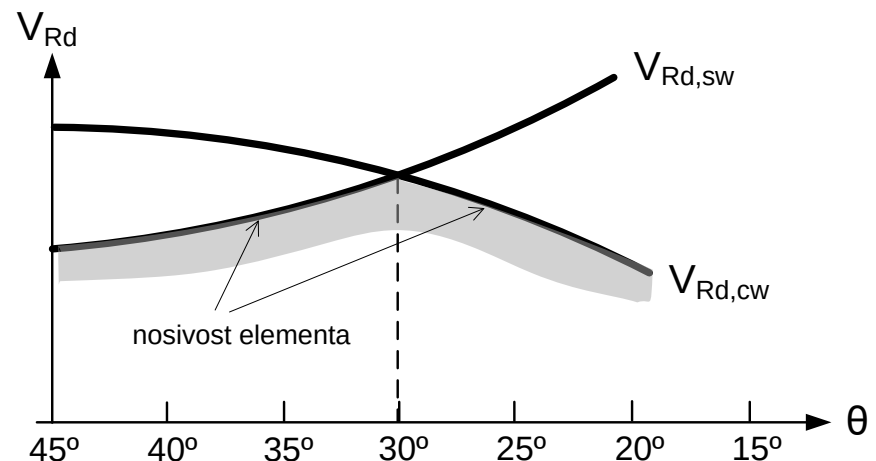
ULS – smicanje

Izjednačavanjem nosivosti betonske dijagonale i uzengija dobija se maksimalna nosivost na smicanje elementa i odgovarajući ugao nagiba pritisnutih dijagonala θ .

Koeficijent armiranja armaturom za smicanje:

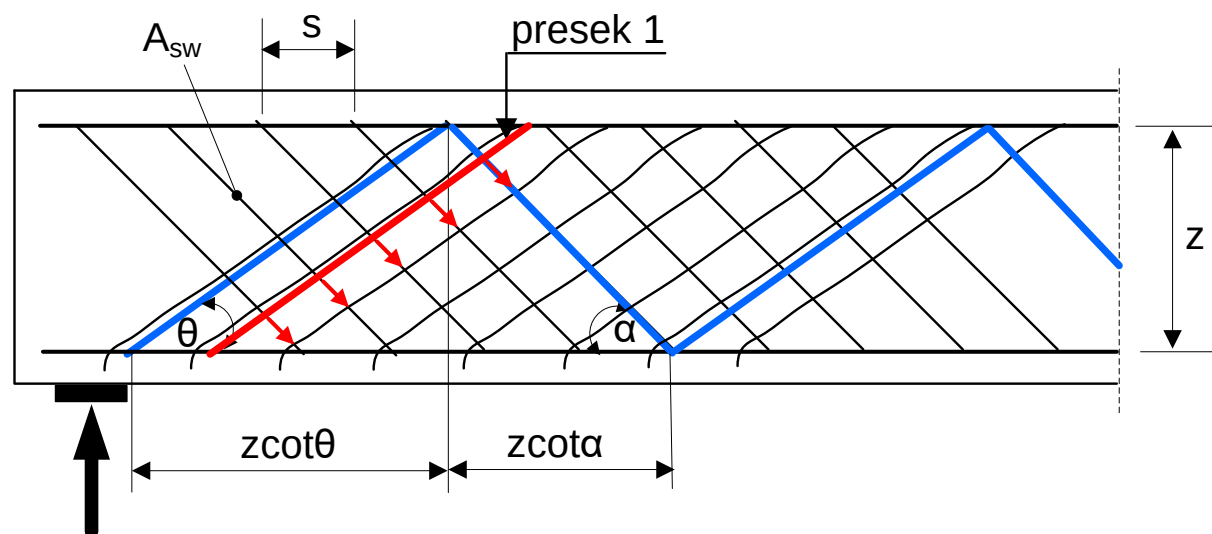
$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{b_w s}$$

$$\cot \theta = \sqrt{\frac{f_{cd2}}{\rho_w f_{ywd}} - 1}$$



ULS – smicanje

Proračun sila u štapovima rešetke



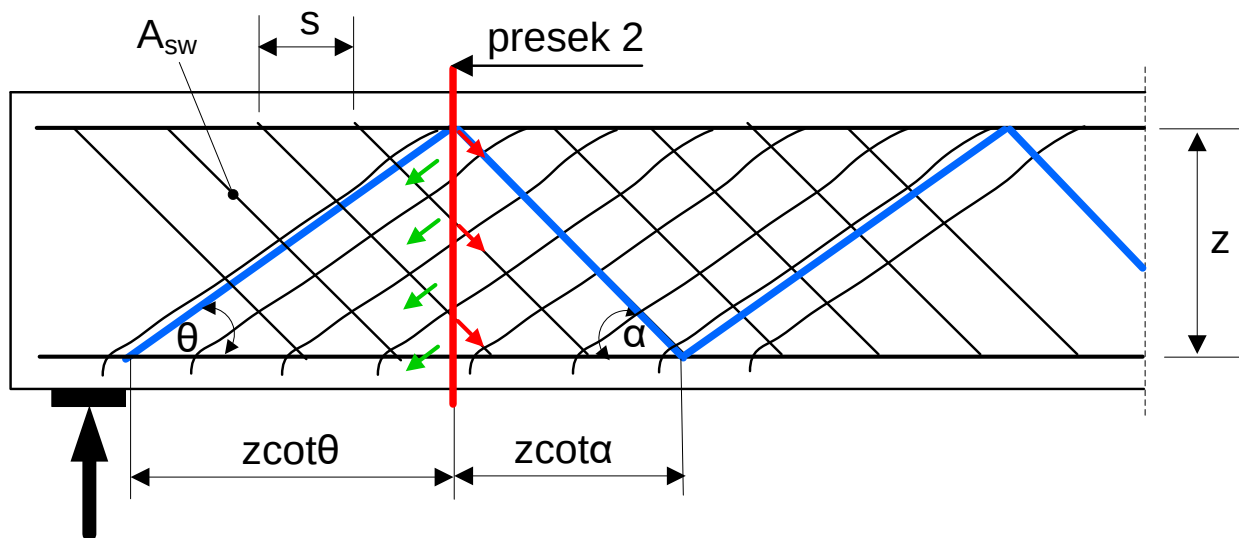
Kosa
armatura
 $\alpha \neq 90^\circ$

$$\sum V^{presek1} = 0$$

$$V = A_{sw} \sigma_{sw} \sin \alpha \frac{z(\cot \alpha + \cot \theta)}{s}$$

ULS – smicanje

Proračun sila u štapovima rešetke



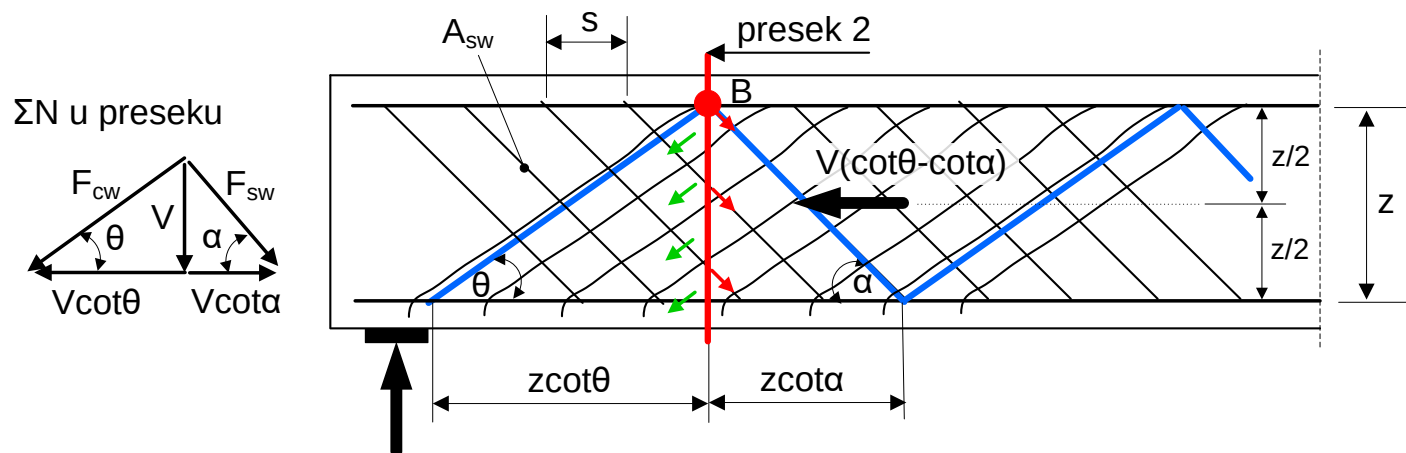
Kosa
armatura
 $\alpha \neq 90^\circ$

$$\sum V_{presek2} = 0$$

$$V = \sigma_{cw} b_w z \frac{\cot \alpha + \cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

ULS – smicanje

Proračun sila u štapovima rešetke



Kosa
armatura
 $\alpha \neq 90^\circ$

$$\sum M^B = 0$$

$$F_s = \frac{M}{z} + \frac{1}{2} V (\cot \theta - \cot \alpha)$$

ULS – smicanje

$$\sigma_{sw} = f_{yd}$$



$$\sigma_{cw} = f_{cd2}$$

Kosa
armatura

$\alpha \neq 90^\circ$

Nosivost pritisnute betonske dijagonale:

$$V_{Rd,cw} = f_{cd2} b_w z \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta}$$

Nosivost uzengija:

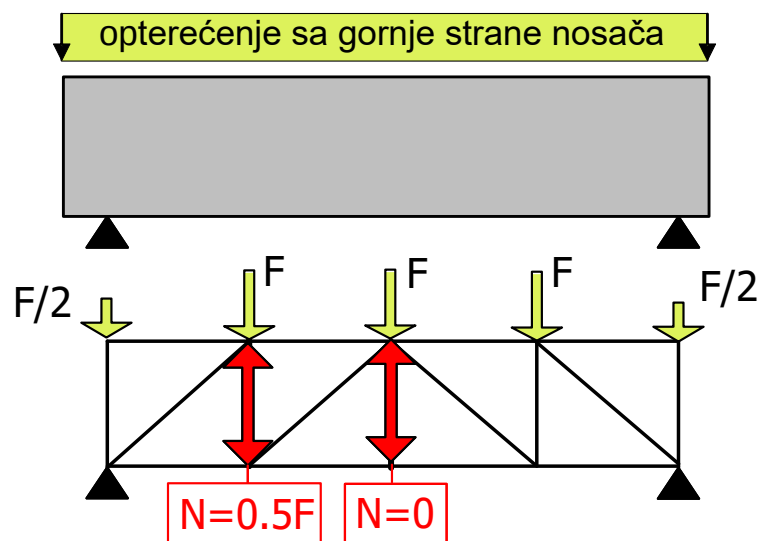
$$V_{Rd,sw} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

Nosivost podužne zategnute armature u svakom preseku mora zadovoljiti:

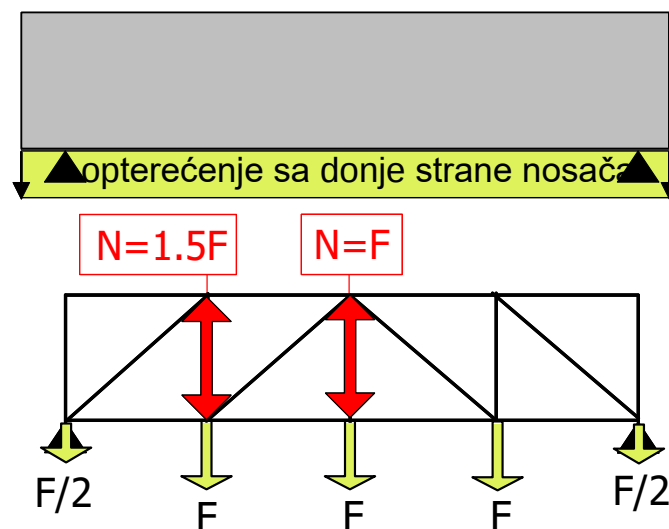
$$F_{s,Rd} \geq F_{s,Ed} = \frac{M_{Ed}}{z} + \frac{1}{2} V_{Ed} (\cot \theta - \cot \alpha)$$

ULS – smicanje

Ako se opterećenje nalazi sa **donje strane nosača**, potrebno je uzengije sračunati i na takozvano obešeno opterećenje:



$$A_{sw} = \frac{F_{Ed}}{f_{yd}}$$



ULS – smicanje

ODREDBE EC2

$V_{Rd,c}$

proračunska nosivost na smicanje elementa bez armature za smicanje

$V_{Rd,s}$

proračunska vrednost sile smicanja koju može da prihvati armatura za smicanje na granici razvlačenja

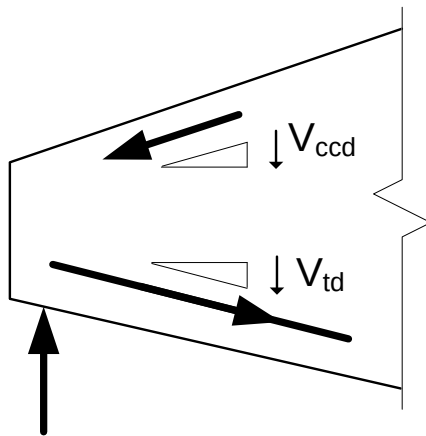
$V_{Rd,max}$

proračunska vrednost najveće sile smicanja koju element može da prihvati, ograničena drobljenjem betona u pritisnutim štapovima

ULS – smicanje

V_{ccd} proračunska vrednost smičuće komponente sile u pritisnutoj zoni, kada je pritisnuti pojas u nagibu

V_{td} proračunska vrednost smičuće komponente sile u zategnutoj armaturi, kada je zategnuti pojas u nagibu



Nosivost na smicanje elementa sa armaturom za smicanje:

$$V_{Rd} = V_{Rd,s} + V_{ccd} + V_{td}$$

ULS – smicanje

PRINCIPI

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$$

nije potrebna proračunska armatura za smicanje

minimalni koeficijent armiranja armaturom za smicanje:

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s b_w \sin \alpha} \geq 0.08 \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}}$$

$$V_{Ed} > V_{Rd,c}$$

treba da se obezbedi dovoljna armatura za

smicanje tako da je $V_{Ed} \leq V_{Rd}$; $\rightarrow V_{Rd,s} \geq V_{Ed}$

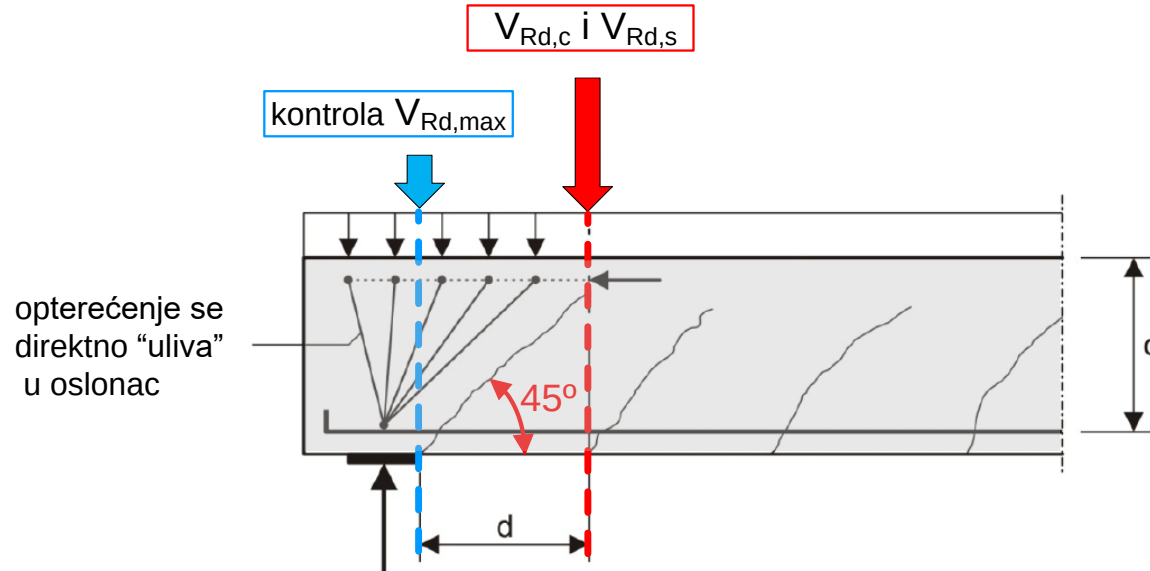
$$V_{Ed} - V_{ccd} - V_{td} \leq V_{Rd,max}$$

Podužna zategnuta armatura treba da bude u stanju da prihvati dodatnu silu zatezanja usled smicanja.

ULS – smicanje

V_{Ed} ne mora da se proverava na rastojanju koje je manje od d od ivice oslonca

$V_{Rd,max}$ se proverava na ivici oslonca



Kada opterećenje deluje u donjoj zoni preseka treba obezbediti dodatnu vertikalnu armaturu koja je dovoljna da prenese opterećenje u gornju zonu preseka.

ULS – smicanje

Elementi za koje se ne zahteva proračun armature za smicanje

Proračunska vrednost nosivosti na smicanje (savijanjem) elemenata koji nemaju armaturu za smicanje, $V_{Rd,c}$:

$$V_{Rd,c} = \left[C_{Rd,c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} + k_1 \sigma_{cp} \right] b_w d$$

ali ne manje od:

$$V_{Rd,c} = (v_{\min} + k_1 \sigma_{cp}) b_w d$$

ULS – smicanje

$V_{Rd,c}$ (N);
 $C_{Rd,c}$ =0.18/ γ_c , koeficijent;
 k_1 =0.15, koeficijent;
 f_{ck} karakteristična čvrstoća betona pri pritisku (MPa);

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2.0 \quad d \text{ (mm)}$$

$$\rho_l = \frac{A_{s1}}{b_w d} \leq 0.02$$

A_{s1} površina zategnute armature, koja se produžava za najmanje ($l_{bd}+d$) izvan razmatranog preseka, l_{bd} je dužina sidrenja;
 b_w najmanja širina poprečnog preseka u zategnutoj zoni (mm);
 σ_{cp} = $N_{Ed}/A_c < 0.2f_{cd}$ (MPa);
 N_{Ed} aksijalna sila u poprečnom preseku od opterećenja ili prethodnog naprezanja (N), pozitivna u slučaju pritiska;
 A_c površina poprečnog preseka betona (mm²);
 v_{min} = $0.035^{3/2} \cdot f_{ck}^{1/2}$.

ULS – smicanje

Proračunska vrednost nosivosti na smicanje (zatezanjem) elemenata koji nemaju armaturu za smicanje, $V_{Rd,c}$ (napon u betonu pri zatezanju savijanjem manji od $f_{ctk,0,05}/\gamma_c$) :

$$V_{Rd,c} = \frac{I \cdot b_w}{S} \sqrt{(f_{ctd})^2 + \alpha_1 \sigma_{cp} f_{ctd}}$$

- I moment inercije poprečnog preseka;
- b_w širina poprečnog preseka u težišnoj osi;
- S statički moment površine preseka iznad težišne ose, za težišnu osu;
- α_1 koeficijent kojim se uzima u obzir položaj razmatranog preseka u odnosu na dužinu unošenja sile prethodnog naprezanja, jednak jedinici osim za prethodno zategnute kablove;
- σ_{cp} napon pritiska u betonu u težišnoj osi preseka, od aksijalnog opterećenja i/ili prethodnog naprezanja ($\sigma_{cp} = N_{Ed}/A_c$, u (MPa), $N_{Ed} > 0$ za pritisak).

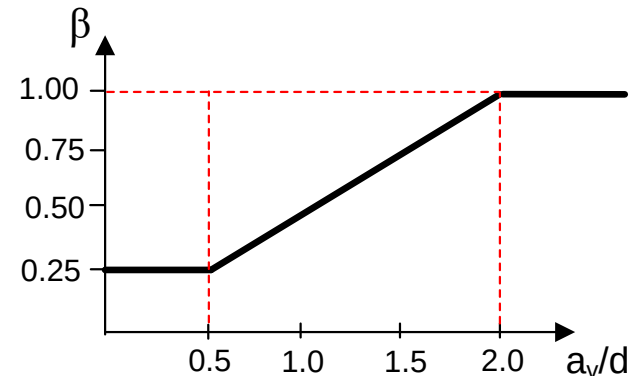
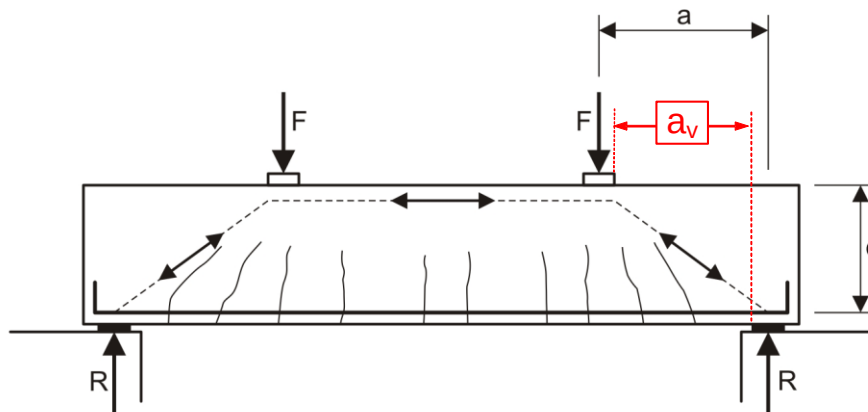
ULS – smicanje

Ako se opterećenje nalazi unutar rastojanja $0.5d \leq a_v \leq 2d$ od ivice oslonca, proračunska vrednost sile smicanja iznosi:

$$V_{Ed,av} = \beta V_{Ed}$$

$$\beta = a_v/2d$$

za $a_v \leq 0.5d$, usvaja se $a_v = 0.5d$



ali mora:

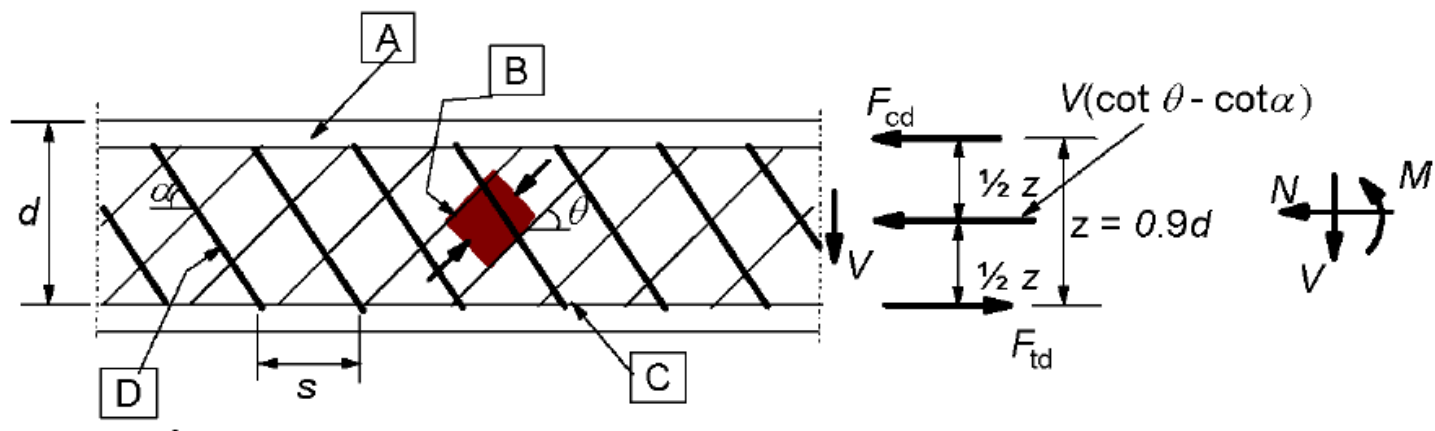
$$V_{Ed} \leq 0.5b_w d v f_{cd}$$

$$v = 0.6 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \quad (f_{ck} \text{ u MPa})$$

ULS – smicanje

Elementi za koje se zahteva proračun armature za smicanje

Zasniva se na modelu rešetke sa promenljivim nagibom pritisnutih betonskih štapova θ .



A pritisnuti pojas

B pritisnuti štapovi

C zategnuti pojas

D armatura za smicanje

ULS – smicanje

- α ugao između armature za smicanje i ose grede upravne na silu smicanja;
- θ ugao između pritisnutog betonskog štapa i ose grede upravne na silu smicanja;
- F_{td} proračunska vrednost sile zatezanja u podužnoj armaturi;
- F_{cd} proračunska vrednost sile pritiska u betonu u pravcu podužne ose elementa;
- b_w najmanja širina između zategnutog i pritisnutog pojasa;
- z krak unutrašnjih sila koji odgovara momentu u razmatranom elementu; može da se koristi približna vrednost $z=0.9d$ za čisto savijanje.

$$1 \leq \cot \theta \leq 2.5$$



$$45^\circ \leq \theta \leq 21.8^\circ$$

ULS – smicanje

Za elemente sa **uzengijama**, nosivost na smicanje, V_{Rd} , jednaka je manjoj od sledeće dve vrednosti:

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} \cot \theta$$

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} v_1 f_{cd} b_w z \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

A_{sw} površina preseka armature za smicanje;

s rastojanje armature za smicanje;

f_{ywd} proračunska granica razvlačenja armature za smicanje;

v_1 = v , koeficijent kojim se smanjuje čvrstoća betona zbog prslina usled smicanja;

α_{cw} koeficijent kojima se uzima u obzir stanje napona u pritisnutom pojasu i iznosi:

$\alpha_{cw} = 1 + \sigma_{cp} / f_{cd}$ za $0 < \sigma_{cp} \leq 0.25 f_{cd}$

$\alpha_{cw} = 1.25$ za $0.25 f_{cd} < \sigma_{cp} \leq 0.5 f_{cd}$

$\alpha_{cw} = 2.5(1 - \sigma_{cp} / f_{cd})$ za $0.5 f_{cd} < \sigma_{cp} < 1.0 f_{cd}$

gde je σ_{cp} srednja vrednost napona pritiska u betonu, sa pozitivnim znakom, usled proračunske aksijalne sile, za idealizovan presek.

ULS – smicanje

Za elemente sa **armaturom za smicanje pod uglom α** , nosivost na smicanje, V_{Rd} , jednaka je manjoj od sledeće dve vrednosti:

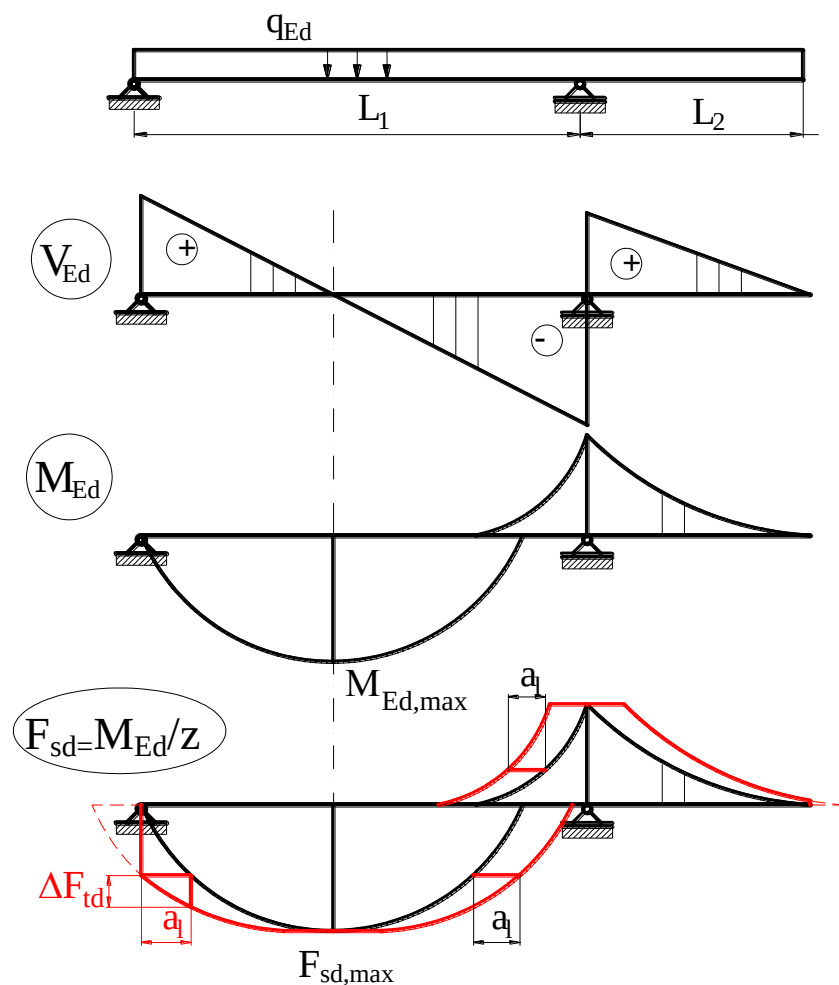
$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \nu_1 f_{cd} b_w z \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta}$$

Dodatna sila zatezanja u podužnoj armaturi ΔF_{td} usled smicanja V_{Ed} se sračunava:

$$\Delta F_{td} = \frac{1}{2} V_{Ed} (\cot \theta - \cot \alpha)$$

ULS – smicanje



Pomeranje linije zatežućih
sila za a_1 :

$$a_1 = \frac{1}{2} (\cot \theta - \cot \alpha)$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$a_1 = 1.25z, \text{ za } \theta = 21.8^\circ$$

$$a_1 = 0.5z, \text{ za } \theta = 45^\circ$$

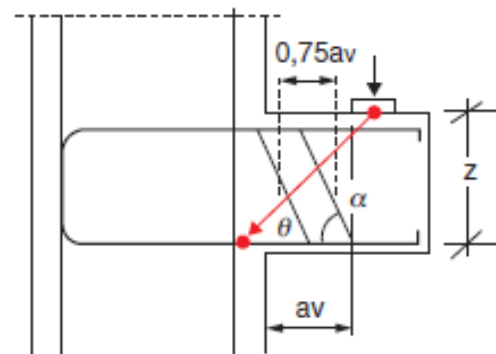
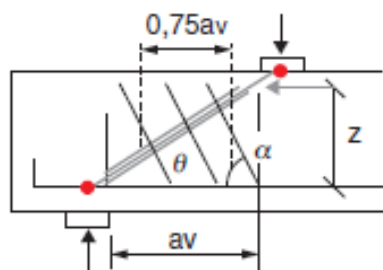
ULS – smicanje

Ako se opterećenje nalazi unutar rastojanja $0.5d \leq a_v \leq 2d$ od ivice oslonca, proračunska vrednost sile smicanja iznosi:

$$V_{Ed,av} = \beta V_{Ed}$$

$$\beta = a_v / 2d$$

za $a_v \leq 0.5d$, usvaja se $a_v = 0.5d$



$$V_{Ed,av} \leq A_{sw} f_{ywd} \sin \alpha$$

ali mora:

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,max} = \alpha_{cw} v_1 f_{cd} b_w z \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

ULS – smicanje

Minimalni koeficijent armiranja armaturom za smicanje

I kada armatura za smicanje nije potrebna, mora se obezbediti minimalni koeficijent armiranja armaturom za smicanje pod uglom α :

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{sb_w \sin \alpha} \geq 0.08 \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}}$$

gde su:

- ρ_w koeficijent armiranja armaturom za smicanje;
- A_{sw} površina armature za smicanje na dužini s ;
- s međusobno rastojanje armature, mereno duž podužne ose elementa;
- b_w širina rebra elementa;
- α ugao između armature za smicanje i podužne ose elementa.

ULS – smicanje

Najveće podužno rastojanje između uzengija, treba usvojiti prema tabeli 1 iz našeg Nacionalnog priloga:

Табела 1 – Највеће подужно растојање између елемената арматуре за смицање $s_{l,max}$

	Прорачунска вредност силе смицања V_{Ed}^*	Класе чврстоће бетона	
		$\leq C 50/60$	$> C 50/60$
1.	$V_{Ed} \leq 0,3V_{Rd,max}$	$0,75 d^{**}) \leq 300 \text{ mm}$	$0,75 d \leq 200 \text{ mm}$
2.	$0,3V_{Rd,max} \leq V_{Ed} \leq 0,6V_{Rd,max}$	$0,55 d \leq 300 \text{ mm}$	$0,55 d \leq 200 \text{ mm}$
3.	$V_{Ed} > 0,6V_{Rd,max}$	$0,3 d \leq 200 \text{ mm}$	

* $V_{Rd,max}$ може да се одреди поједностављено са $\theta = 40^\circ$ ($\cot \theta = 1,2$).

** За греде код којих је $h < 200 \text{ mm}$ и $V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$ растојање не мора да буде мање од 150 mm .

Najveće podužno rastojanje između koso povijene armature iznosi:

$$s_{b,max} = 0.6d(1 + \cot \alpha)$$

ULS – smicanje

Najveće poprečno rastojanje nožica uzengija, treba usvojiti prema tabeli 2 iz našeg Nacionalnog priloga:

Табела 2 – Највеће попречно растојање ножица арматуре за смицање $S_{tr,max}$

	Прорачунска вредност силе смицања V_{Ed}^*	Класе чврстоће бетона	
		$\leq C 50/60$	$> C 50/60$
1.	$V_{Ed} \leq 0,3 V_{Rd,max}$	$0,75 d \leq 600 \text{ mm}$	$0,75 d \leq 400 \text{ mm}$
2.	$0,3 V_{Rd,max} \leq V_{Ed} \leq 0,6 V_{Rd,max}$	$0,75 d \leq 600 \text{ mm}$	$0,75 d \leq 400 \text{ mm}$
3.	$V_{Ed} > 0,6 V_{Rd,max}$	$0,3 d \leq 300 \text{ mm}$	

* $V_{Rd,max}$ може да се одреди поједностављено са $\theta = 40^\circ$ ($\cot \theta = 1,2$).